

فصل اول

مجموعه ها



مقدمه

برخی مفاهیم با اینکه **قابل تعریف نیستند** (بنداشت) ولی ما آنها را درک میکنیم و میشناسیم؛ از جمله مفاهیم که در ریاضیات قابل تعریف نبوده اند و با آن آشنا شده اید مفهوم نقطه و خط بوده است. در فصل اول ریاضیات نهم با یکی دیگر از مفاهیم غیر قابل تعریف ریاضی با نام مجموعه آشنا خواهید شد.

گئورگ کانتور (۱۸۴۵-۱۹۱۸)

ریاضیدان آلمانی

خالق نظریه مجموعه ها



دانش آموزان عزیز، یک شخص به اسم **آقا علی** که دانش آموز باهوشی هستند سعی میکند جایی که توضیحات فهمیدنش سخت می باشد از من سوال بپرسد که بیشتر توضیحش بدهم. اگر میخواهید دقیقاً مطالب را یاد بگیرید به سوالات **آقا علی** دقت کنید و جایی که انتظار میرود **آقا علی** مثال بزند شما هم یک مثال بزنید.

درس اول: معرفی مجموعه

توضیح مجموعه: برای بیان و نمایش دسته یا گروهی از اشیا، حروف، اعداد و ... که **تمایز (غیر تکراری)** و **کاملاً مشخص** هستند، از مجموعه استفاده میکنیم.

آقا علی: ببخشید آقا من فهمیدم تمایز بودن یعنی مثلاً عدد تکراری توی مجموعه نباشه، ولی اینکه میگویم کاملاً مشخص باشه یعنی چی؟



پاسخ: علی جان یک عبارت زمانی مشخص کننده ی مجموعه است که کاملاً گویا و شفاف باشد یعنی به طور دقیق مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیزهایی در آن مجموعه قرار ندارند. حالا علی جان به مثال های زیر دقت کنید:

مثال ۱: عبارت «شمارنده های عدد ۱۶» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملاً مشخص که اعداد ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ در مجموعه قرار میگیرند و عددی مثل ۳ در مجموعه نخواهد بود.

مثال ۲: عبارت «اعداد بسیار کوچک» مجموعه نیست، چون این عبارت کاملاً مشخص نمیکند چه عددهایی در مجموعه قرار دارند. ممکن است یک نفر عدد ۱ را کوچک بداند و شخص دیگری عدد ۱/۰۰۰۰۰.

حالا علی جان شما مثالی بگو:



مثال ۳ از آقا علی:

آقا عبارت «چهار عدد مرکب کوچکتر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملاً مشخص است اعداد ۴ و ۶ و ۸ و ۹ در این مجموعه قرار دارند.

ایستگاه حل سوال

۱. با دلیل مشخص کنید کدام عبارت مجموعه است و کدام عبارت مجموعه نیست؟

الف) چهار میوه خوشمزه

پاسخ: مجموعه نیست. چون انتخاب چهار میوه کاملاً سلیقه ایست و دقیقاً مشخص نمیکند چه میوه ای در

مجموعه است.



ب) سه فصل از سال

پاسخ: مجموعه نیست. چون هر سال چهار فصل دارد، در نتیجه دقیقاً مشخص نیست چه فصل های در

مجموعه هستند.

پ) کل حالت های پرتاب یک تاس استاندارد

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است که اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ در مجموعه هستند.

ت) پنج شاعر معروف ایرانی

پاسخ: مجموعه نیست. چون کاملاً مشخص نیست چه شاعرانی در این مجموعه قرار میگیرند.



۲. کدام عبارت مشخص کننده یک مجموعه است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف) سه اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون اعداد اول کمتر از ۱۰ عبارت اند از: ۲ و ۳ و ۵ و ۷، پس دقیقاً مشخص نیست کدام

سه تا از این اعداد در مجموعه قرار دارند.

ب) پنج عدد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه نیست. چون تعداد اعداد اول کمتر از ۴ تا می باشد پس نمیتوان پنج عدد متمایز اول از آنها

انتخاب کرد.

پ) اعداد اول کوچکتر از ۱۰

پاسخ: مجموعه است. کاملاً مشخص است که اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ در این مجموعه هستند.

ت) شمارنده های اول عدد ۱۲

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است شمارنده های اول عدد ۱۲ اعداد ۲ و ۳ میباشند.

ث) مضارب اول ۱۱

پاسخ: مجموعه است. چون کاملاً مشخص است. تنها مضرب اول عدد یازده خود ۱۱ است که در مجموعه قرار می

گیرد.

۳. عباراتی که یک مجموعه را مشخص می کنند را با «✓» و عباراتی که یک مجموعه را مشخص نمی کند را با «X» مشخص کنید.

(الف) سه عدد زوج متوالی. (ب) اعداد حسابی کوچکتر از ۱.

(پ) جواب معادله $2x - 1 = 3$ (ت) اعداد صحیح بزرگتر از -۱

پاسخ: الف X (چون اعضاء نامشخص هستند) ب ✓ پ ✓ ت ✓

ایستگاه مطالعه

نمایش های مختلف مجموعه: مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری میکنیم و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

۱. استفاده از یک جفت آکولاد: به این نوع نمایش ، نمایش تفصیلی مجموعه میگویند.

بطور مثال اگر A مجموعه ی شمارنده های عدد ۱۰ باشد، نمایش تفصیلی A به صورت زیر است:

$$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 5 \text{ و } 10\}$$

۲. نمایش هندسی (نمودار ون): اعضای مجموعه را داخل یک دایره یا اشکال هندسی قرار می دهیم. دقت شود بین

اعضا در این روش «و» قرار نمی دهیم. به طور مثال اگر B مجموعه ی مضرب های طبیعی و یک رقمی عدد ۳ باشد

نمایش هندسی آن بصورت زیر است:



۳. نمایش ریاضی: با استفاده از علائم ریاضی رابطه ی جبری برای مجموعه تعریف میشود. این نوع نمایش را در

ایستگاه های مطالعه بعدی بررسی خواهیم کرد.

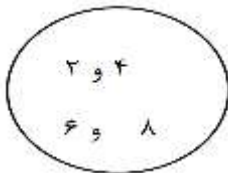
آقا علی: آقا اجازه از کجا بفهمیم از کدوم نمایش برای جواب باید استفاده کنیم؟



آفرین علی جان سوال خوبی پرسیدی. این سه روش معادل هستند و هیچ تفاوتی نداره که شما از چه روشی استفاده کنی ، مگر اینکه در صورت سوال روش خاصی عنوان گردد. به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه ی اعدادی که نه اول هستند و نه مرکب را به صورت مجموعه نمایش دهیم از دو روش تفصیلی و هندسی (نمودار ون) استفاده می کنیم.

{۱} یا ۱

حالا علی جان شما یک مثال بزنید.

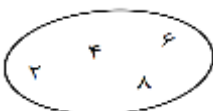


آقا علی: آقا اجازه «مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰» ؛

به روش تفصیلی میشه: {۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰} نمودار ون هم



علی جان خیلی خوب نوشتی فقط یک اشتباه کوچیک داره ما در نمودار ون بین اعضا " و " قرار نمیدیم بلکه اعضا را با فاصله از هم مینویسیم یعنی بایستی اینطور نمایش میدادی:



عضو مجموعه: هر کدام از اعداد، اشیاء، افراد و ... که درون یک مجموعه قرار می گیرند را عضوی از مجموعه می گویند. برای مثال اگر مجموعه ی A به صورت $A = \{a \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیریم. برای مثال می گوییم a عضوی از مجموعه ی A است و می نویسیم $a \in A$ و همچنین برای عددی مثل ۴ که عضو مجموعه ی A نیست می نویسیم: $۴ \notin A$



آقا علی: آقا اجازه این نکته را داریم: نماد عضو بودن: $\in$ و نماد عضو نبودن: $\notin$

به نحوه ی استفاده از نماد عضویت دقت کنید. اگر بنویسیم $A \in ۳$ ، با توجه به این که این عبارت را " A عضو ۳ است" می خوانیم، بی معنی و عبارتی نادرست است و عبارت درست به صورت $۳ \in A$ است.



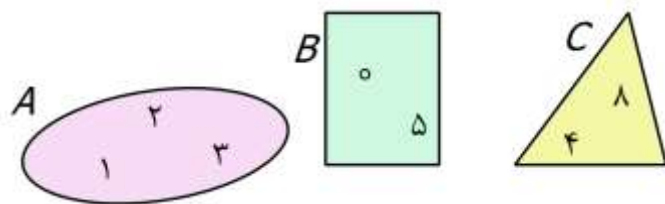
آقا علی: آقا اجازه مثلا اگر مجموعه ی A شمارنده های عدد ۱۸ باشد، مجموعه ی A به صورت زیر است:

$$A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۶ \text{ و } ۹ \text{ و } ۱۸\} \text{ و داریم: } ۶ \in A \text{ و } ۱۲ \notin A \text{ و } ۲ \notin A \text{ و } ۱ \in A$$

علی جان همه ی پاسخ ها درست بود به جز $۲ \notin A$ چون در A عضو ۲ وجود دارد پس باید $۲ \in A$ می نوشتی.

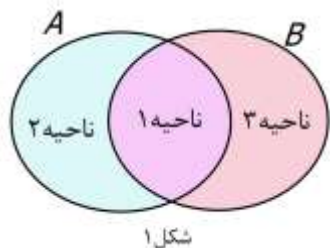
توجه: با بیان چند مثال می خواهیم با نحوه ی کشیدن نمودار ون برای تعدادی مجموعه آشنا شویم.

مثال (۱) مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$ و $B = \{۵ \text{ و } ۵\}$ و $C = \{۴ \text{ و } ۸\}$ را با نمودار ون نمایش دهید. دقت کنیم سه مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند. در این حالت سه نمودار کاملا مجزا (جدا از هم) ترسیم می کنیم.



مثال (۲) مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$ و $B = \{۱ \text{ و } ۵ \text{ و } ۲\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

اگر خوب دقت کنید اعداد ۱ و ۲ هم عضو A هستند و هم عضو B پس مجبوریم قسمتی از دو نمودار را درون هم ترسیم کنیم.



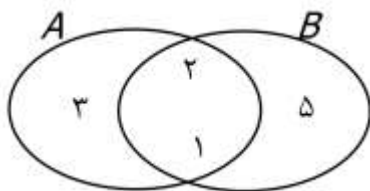
به شکل ۱ دقت کنید. برای قرار دادن اعداد در نمودار به صورت زیر عمل می کنیم:

در ناحیه شماره ۱ اعدادی را قرار می دهیم که هم در A باشند و هم در B

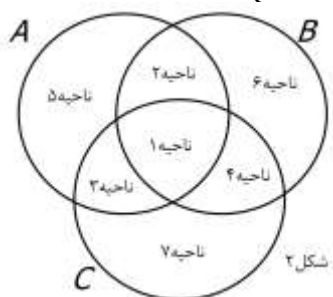
در ناحیه ی ۲ اعدادی را می نویسیم که فقط در A هستند.

در ناحیه ی ۳ اعدادی را می نویسیم که فقط در B هستند.

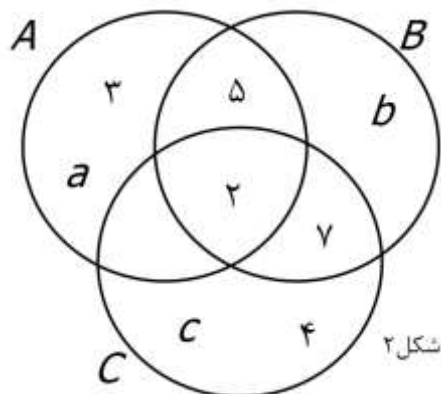
پس اعضاء را در نمودار طبق شکل مقابل می نویسیم



مثال ۳) مجموعه های $A = \{a \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۵\}$ و $B = \{b \text{ و } ۲ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷\}$ و $C = \{c \text{ و } ۲ \text{ و } ۷ \text{ و } ۴\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.



با توجه به شکل ۲ برای کامل کردن نمودار ون برای سه مجموعه به ترتیب شماره ناحیه ها عمل میکنیم.



ناحیه ۱: اعضای که در سه مجموعه مشترک هستند.

ناحیه ۲: اعضای که هم در A و هم در B هستند، ولی در C قرار ندارند.

ناحیه ۳: اعضای که هم در A و هم در C هستند ولی در B نیستند.

ناحیه ۴: اعضای که هم در B و هم در C هستند ولی در A نیستند.

ناحیه ۵: اعضای که فقط در A هستند.

ناحیه ۶: اعضای که فقط در B هستند.

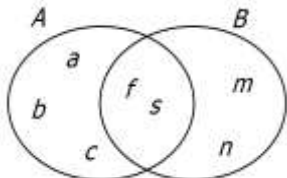
ناحیه ۷: اعضای که فقط در C هستند.

برای پاسخ به مثال ۳: در ناحیه ۱: عدد ۲ در ناحیه ۲: عدد ۵ در ناحیه ۳: عضوی قرار نمیگیرد.

در ناحیه ۴: عدد ۷ در ناحیه ۵: عضوهای a و ۳ در ناحیه ۶: عضو b در ناحیه ۷: عضوهای c و ۴ (شکل ۲)

ایستگاه حل سوال

۱) اعضای مجموعه های A, B را با اعضایشان با توجه به نمودار ون داده شده مشخص کنید.



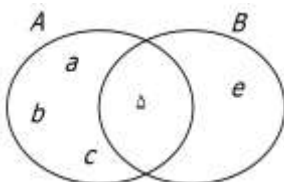
پاسخ: $A = \{a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } f \text{ و } s\}$ و $B = \{s \text{ و } f \text{ و } m \text{ و } n\}$

۲) با توجه به نمودار ون مقابل در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$b \dots A$ $a \dots B$ $\delta \dots B$ $\delta \dots A$

پاسخ:

$b \in A$ $\delta \in B$ $a \notin B$ $\delta \in A$



۳) با توجه به مجموعه ی $A = \left\{-1 \text{ و } ۳ \text{ و } -(-۲)^۴ \text{ و } \frac{-۹}{۳}\right\}$ در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$۱ \dots A$ $-۱۶ \dots A$ $۳ \dots A$ $۱۶ \dots A$ $۰ \dots A$

پاسخ: ابتدا در صورت امکان اعضاء را ساده میکنیم سپس به سوال جواب میدهیم در نتیجه داریم:

$$A = \left\{-1 \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } -(-۲)^4 \text{ و } \cancel{\frac{-۹}{۳}}\right\} = \{-1 \text{ و } ۱ \text{ و } -۱۶ \text{ و } -۳\}$$

پس: $۱ \in A$ $-۱۶ \in A$ $۳ \notin A$ $۱۶ \notin A$ $۰ \notin A$

نکته: در یک مجموعه با جابه جا کردن اعضا، مجموعه ی جدیدی ایجاد نمیشود.

به طور مثال مجموعه های $\{۲ و ۳ و ۵\}$ با $\{۳ و ۲ و ۵\}$ و $\{۵ و ۳ و ۲\}$ همگی یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص میکنند.

نکته: اگر در یک مجموعه عضو تکراری وجود داشته باشد، اعضای تکراری را حذف میکنیم و آن عضو را فقط یکبار مینویسیم.

بطور مثال مجموعه ی $\{۲ و ۳ و ۵ و ۲ و ۳ و ۵\}$ عضو ۲ دوبار و ۳ سه بار تکرار شده اند که تکرارهایشان را حذف میکنیم و مجموعه را به حالت استاندارد $\{۲ و ۳ و ۵\}$ مینویسیم.

تعداد اعضای یک مجموعه (عدد اصلی مجموعه)

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه میگویند. عدد اصلی یک مجموعه مثل B را با نماد $n(B)$ نمایش می دهیم.

مثال ۱: $A = \{۱ و ۳ و ۵ و ۷\}$ بنابراین $n(A) = ۴$



آقا علی: آقا اجازه اگر مجموعه عضوهای تکراری داشت و عدد اصلی مجموعه رو پرسیده بود اقا باید بشماریمشون یا طبق نکته اول مجموعه رو استاندارد کنیم بعد تعداد اعضای مجموعه رو مشخص کنیم؟

علی جان ابتدا اعضای تکراری رو حذف میکنیم بعد عدد اصلی مجموعه رو تعیین میکنیم.

به این مثال دقت کن: $n(A) = ۳ \rightarrow A = \{۲ و ۵ و ۶\}$ $A = \{۶ و ۶ و ۲ و ۵ و ۶ و ۲ و ۵ و ۶\}$

سوال ۱: اعضای هر مجموعه را مشخص کنید و تعداد اعضای هر کدام را تعیین کنید.

الف) مجموعه ی اعداد اول بین ۲۰ و ۳۵

ب) مجموعه ی اعداد فرد بین ۵ و ۱۶

ج) مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۳۰ و ۱۸

پاسخ:

الف) $n(A) = ۳ \leftarrow A = \{۲۳ و ۲۹ و ۳۱\}$

ب) $n(B) = ۵ \leftarrow B = \{۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵\}$

ج) مقسوم علیه های عدد ۳۰: ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۳۰

مقسوم علیه های عدد ۱۸: ۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۸

مجموعه مقسوم علیه های مشترک دو عدد عبارت است از: $C = \{۱ و ۲ و ۳ و ۶\}$ بنابراین $n(C) = ۴$



مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه ی تهی می گوئیم.
مجموعه تهی را با $\{\}$ یا $\emptyset$ نمایش می دهیم. دقت کنید مجموعه های $\{0\}$ یا $\{\emptyset\}$ مجموعه ی تهی نیستند.
توجه: با توجه به تعریف مجموعه تهی $n(\emptyset)=0$ یعنی عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: الف) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از یک، تهی است.

ب) مجموعه ی مضارب اول عدد ۴، چون ۴ عددی مرکب است پس مضرب اولی ندارد این مجموعه تهی است.

ج) مجموعه ی اعداد صحیح بین ۰ و -۱، تهی است.

بیشتر بدانیم

مجموعه یکانی: مجموعه هایی که فقط یک عضو دارند را یکانی می گوئیم.

مثال: مجموعه ی مضرب های اول عدد ۷. زیرا هر عدد اول فقط یک مضرب اول که خودش دارد پس این مجموعه یکانی و تنها عضو آن خود ۷ است.

مجموعه ی اعداد صحیح بین ۱ و -۱ تنها عدد صحیح بین این دو عدد ۰ میباشد پس این مجموعه نیز یکانی است.
مجموعه ی $\{\emptyset\}$ این مجموعه نیز یکانی است و تنها عضو آن $\emptyset$ میباشد.

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آنکه بین این اعضا نظم وجود داشته باشد، میتوانیم ابتدا تعدادی از آنها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم (...). و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم.

$$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 1000\}$$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان نرسد (حتی اگر خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه نامتناهی می گوئیم. مجموعه A یک مجموعه ی متناهی با ۱۰۰۰ عضو می باشد.

در صورتی که مجموعه دارای بی شمار عضو باشد یعنی عضوهای آن تمام نشود آن را مجموعه نامتناهی می گوئیم.

$$B = \{3 \text{ و } 6 \text{ و } 9 \text{ و } \dots\} \quad \text{مانند مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳}$$

ایستگاه حل سوال

پاسخ: ۲ عضو

۱. مجموعه $\{\emptyset \text{ و } 0\}$ چند عضو دارد؟

پاسخ: ۱۱ عضو

۲. مجموعه $\{0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } \dots \text{ و } 20\}$ چند عضو دارد؟۳. در مورد تعداد اعضای مجموعه $\{0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } \dots\}$ چه می توان گفت؟

پاسخ: این مجموعه نامتناهی است پس بی شمار عضو دارد.

برای یادگیری بیشتر و مرور مطالب تمرینات صفحه ی ۵ کتاب درسی را حل کنید.

تعریف دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوییم در صورتی که عضوهایشان کاملاً یکسان باشد. (دقت کنید جابه جایی عضو ها ایرادی ندارد.) در صورتی که مجموعه های A و B مساوی باشند با نماد $A=B$ این موضوع را بیان میکنیم.

مثال: دو مجموعه ی $A = \{۰ و ۲ و ۱\}$ و $B = \{۰ و ۱ و ۲\}$ با هم برابرند.



آقا علی: آقا اجازه یعنی برای اینکه دو مجموعه برابر باشند هر چی اولی داشت دومی هم باید داشته باشه و برعکس درسته؟

دقیقا علی جان ما با توجه به همین نکته سوالات این قسمت رو حل میکنیم. به این مثال توجه کنید:

مثال: اگر دو مجموعه زیر مساوی باشند، جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید؟

$$\{۵ و ... و ۲۳\} = \{\sqrt{۸۱} و \sqrt{۲۵} و ...\}$$

پاسخ: اگر اعضای مجموعه ها را ساده کنیم آنگاه جاهای خالی را به سادگی میتوان با عدد مناسب کامل کرد.

$$\{۵ و ۹ و ۲۳\} = \{\sqrt{۸۱} و \sqrt{۲۵} و ۸\}$$

۱. جاهای خالی را طوری کامل کنید که تساوی بین مجموعه ها برقرار باشد.

$$\{... و \frac{1}{9} و \frac{3}{25} و ۳۲\} = \{۱ و \sqrt{۴۹} و ... و ۹\} \text{ (الف)}$$



پاسخ:

$$\{۹ و ۷ و \sqrt{۴۹} و \frac{1}{3}\} = \{۳۲ و \frac{3}{25} و \sqrt{\frac{1}{9}} و ۷\}$$

۲. اگر دو مجموعه $A = \{۶ و ۲ و ۵ و a\}$ و $B = \{۶ و ۹ و -۷ و b\}$ با هم مساوی باشند. مقدار a و b را بدست آورید؟

$$\{a + ۵ و ۲ و ۶\} = \{۶ و ۹ و -۷ + b\}$$

با تشکیل معادله مقدار a و b را بدست می آوریم. چون دو مجموعه برابرند و در مجموعه A عضو ۲ قرار دارد پس این عضو در مجموعه B نیز باید وجود داشته باشد در نتیجه:

$$-۷ + b = ۲ \rightarrow b = ۲ + ۷ = ۹$$

و همچنین در مجموعه B عدد ۹ قرار دارد ولی در مجموعه A قرار ندارد که با توجه به تساوی این دو مجموعه نتیجه میگیریم:

$$a + ۵ = ۹ \rightarrow a = ۹ - ۵ = ۴$$

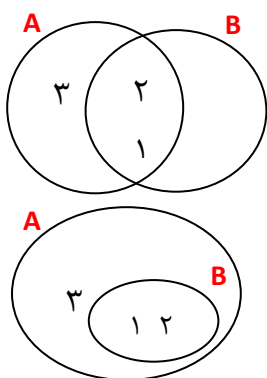


۳. در صورتی که $\{x + 2, -3\} = \{-3\}$ آنگاه مقدار x را تعیین کنید.

پاسخ: $\{-3\}$ این مجموعه **یک عضوی** است پس مقدار x را طوری تعیین میکنیم که مجموعه دوم نیز یک عضوی شود و تنها عضوش نیز -3 باشد. در نتیجه با تشکیل معادله داریم:

$$x + 2 = -3 \rightarrow x = -3 - 2 = -5$$

ایستگاه مطالعه



مثال: نمودار ون مجموعه های $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2\}$ را رسم کنید. اگر دقت کنید تمام اعضای B درون مجموعه A وجود دارند در این حالت بهتر است حلقه B را درون حلقه A رسم کنیم. در واقع نمودار دوم رایج تر میباشد.

زیر مجموعه: اگر همه ی اعضای مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشند، میگوییم B زیرمجموعه ی A است.

زیر مجموعه بودن را با علامت $\subseteq$ و زیر مجموعه نبودن را با علامت $\not\subseteq$ نشان میدهیم.

مثال: مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{6, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید روابط زیر بین این سه مجموعه برقرار است:

$$B \subseteq A \quad \text{و} \quad C \not\subseteq A$$

$$A \not\subseteq B \quad \text{و} \quad A \not\subseteq C \quad \text{و} \quad B \not\subseteq C \quad \text{و} \quad C \not\subseteq B$$

دقت کنید که اگر حتی یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه A نباشد B زیرمجموعه A نخواهد بود.

نکته ۱: با توجه به تعریف زیرمجموعه واضح است، هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. که بصورت جبری

$$\text{مینویسیم: } A \subseteq A$$

آقا علی: آقا اجازه چرا هر مجموعه زیرمجموعه خودش؟



علی جان چون اگر یک مجموعه دلخواه مثل $A = \{1, 2\}$ داشته باشیم همه ی عضوهای A در خودش قرار دارند.

آیا مجموعه تهی عضوی وجود دارد که در مجموعه دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد؟

پاسخ: خیر، چون تهی عضوی ندارد.

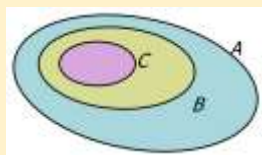
با توجه به سوال میتوان نکته زیر را بیان کرد:

نکته ۲: مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. که به صورت جبری مینویسیم:

$$\emptyset \subseteq A$$

نکته ۳: با توجه به دو نکته بالا میتوان نتیجه گرفت که مجموعه تهی زیر مجموعه خودش نیز است. که بصورت جبری مینویسیم: $\emptyset \subseteq \emptyset$

نکته ۴: مانند نمودار داده شده اگر مجموعه C زیر مجموعه B و مجموعه B نیز زیر مجموعه A باشد؛ آنگاه مجموعه C نیز زیر مجموعه A است. و بطور کلی میتوان نوشت: $C \subseteq B \subseteq A$



مثال: $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 3\}$ و $C = \{3\}$ باشد آنگاه:

$$(C \subseteq B \text{ و } B \subseteq A) \rightarrow C \subseteq A$$

نوشتن زیرمجموعه های یک مجموعه:

با توجه به عضوهای یک مجموعه میتوان زیرمجموعه های آن را تعیین کرد؛ با استفاده از راهبرد الگوسازی که در پایه هفتم آموختید به شیوه زیر عمل میکنیم:

۱. نوشتن زیرمجموعه **صفر عضوی** (یعنی تهی)

۲. نوشتن زیرمجموعه های **یک عضوی** (هر عضو مجموعه را اگر داخل یک آکولاد قرار دهیم یک عضوی ساخته میشود)

۳. نوشتن زیرمجموعه های **دو عضوی** (هر دو عضو را داخل آکولاد قرار می دهیم تا زیر مجموعه دو عضوی بوجود آید)

۴. این مراحل را آنقدر ادامه میدهیم تا آخرین زیر مجموعه که خود مجموعه میباشد برسیم.

مثال ۱: زیر مجموعه های مجموعه $A = \{1, 2\}$ را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب بالا ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی $\{1\}$ و $\{2\}$ و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی (خود مجموعه) $\{1, 2\}$

در نتیجه مجموعه A ، ۴ زیرمجموعه دارد.

مثال ۲: زیر مجموعه های مجموعه $B = \{1, 4, 5\}$ را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی $\{1\}$ و $\{4\}$ و $\{5\}$ و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی $\{1, 4\}$ و $\{1, 5\}$ و $\{4, 5\}$ و ۴. زیرمجموعه های ۳ عضوی $\{1, 4, 5\}$ (خود مجموعه). در نتیجه تعداد زیر مجموعه های مجموعه B ، ۸ تا است.



آقا علی: آقا اجازه تعداد عضو های مجموعه B بدونه بیشتر از A هست و تعداد زیرمجموعه هاش ۲ برابر تعداد زیر مجموعه های A پس میشه نتیجه گرفت اگر به مجموعه ای یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه هاش ۲ برابر میشه؟

بله علی جان دقیقا به همین صورت . و اگر بخواهیم این نتیجه رو دقیق تر بیان کنیم، الگویی بین تعداد عضوهای مجموعه و تعداد زیرمجموعه هاش هست به جدول زیر دقت کن و الگو رو حدس بزن:

عضو n	...	عضو ۳	عضو ۲	عضو ۱	عضو ۰	تعداد عضوهای مجموعه
؟	...	۸	۴	۲	۱	تعداد زیر مجموعه ها



آقا علی: آقا اجازه اگر الگو یابی کنیم مفهمیم که هر مرحله دو برابر مرحله قبلشه (البته بجز مرحله اول) که گفتیم علتش یک عضو بیشتر داشتن نسبت به مرحله قبلشه پس میشه گفت **تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه که n عضو دارد 2^n است.**

ایستگاه حل سوال

۱. یک مجموعه ۴ عضوی چه تعداد زیر مجموعه دارد؟

پاسخ: $n = 4 \rightarrow 2^n = 2^4 = 16$

۲. اگر مجموعه ای ۳۲ زیر مجموعه داشته باشد، چند عضو دارد؟

پاسخ: ۳۲ را تجزیه میکنیم تا توان عدد ۲ را تعیین کنیم که همان تعداد اعضا می باشد.

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

پس میتوان نتیجه گرفت این مجموعه ۵ عضو دارد.

۳. مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید؛

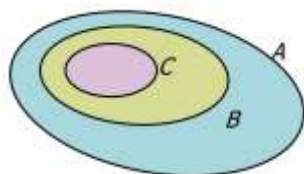
الف) زیر مجموعه های ۲ عضوی این مجموعه را بنویسید.

ب) زیر مجموعه هایی را بنویسید که شامل اعداد ۳ و ۴ باشد.

پاسخ:

الف) $\{1, 2\}$ و $\{1, 3\}$ و $\{1, 4\}$ و $\{2, 3\}$ و $\{2, 4\}$ و $\{3, 4\}$

ب) $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{3, 4, 2\}$ و $\{3, 4, 1\}$ و $\{1, 2, 3\}$



۴. با توجه به نمودار ون مقابل گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) $A \subseteq B \subseteq C$ ب) $A \subseteq C \subseteq B$ ج) $C \subseteq A \subseteq B$ د) $C \subseteq B \subseteq A$

پاسخ: گزینه د، چون حلقه ی C داخل حلقه ی B و حلقه ی B نیز داخل حلقه ی A قرار گرفته است پس

میتوان نتیجه گرفت: $C \subseteq B \subseteq A$





۵. با توجه به مجموعه های A و B در جالی علامت $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ قرار دهید.

$$A = \{-1 \text{ و } 3 \text{ و } -5 \text{ و } 7\} \quad \text{و} \quad B = \{-1 \text{ و } -3 \text{ و } -5\}$$

$$\begin{array}{llllll} B \dots A & A \dots B & \{7\} \dots A & \{\} \dots A & -3 \dots B & B \dots B \\ B \not\subseteq A & A \not\subseteq B & \{7\} \subseteq A & \{\} \subseteq A & -3 \not\subseteq B & B \subseteq B \end{array}$$

پاسخ:

$-3 \not\subseteq B$ چون -3 آکولاد ندارد پس مجموعه نمیتواند باشد و چون مجموعه نیست، زیرمجموعه هم نیست.

۶. با توجه به مجموعه های A و B درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید. (دانش آموزان عزیز به این سوال توجه کنید تا کاربرد نمادها را بهتر درک کنید)

$$A = \{1 \text{ و } a \text{ و } 5\} \quad \text{و} \quad B = \{1 \text{ و } b \text{ و } 4\}$$

$$1 \in B \quad b \notin A \quad A \subseteq \{1 \text{ و } a \text{ و } 5\} \quad \{1 \text{ و } b \text{ و } 4\} \in B \quad b \notin B \quad 5 \subseteq A$$

$5 \subseteq A$ نادرست چون 5 آکولاد ندارد ساختار مجموعه ندارد پس زیرمجموعه نیست.

$b \notin B$ درست. $\{1 \text{ و } b \text{ و } 4\} \in B$ نادرست. $A \subseteq \{1 \text{ و } a \text{ و } 5\}$ درست. $b \notin A$ درست. $1 \in B$ درست.

۷. با توجه به مجموعه $A = \{1 \text{ و } \{1\}\}$:

الف) این مجموعه چند عضو دارد؟
ب) زیر مجموعه های یک عضوی اش را مشخص کنید؟

پاسخ:

الف) در اینگونه سوالات به اعضای که در آکولاد قرار گرفته اند دقت کنید، در این سوال 1 و $\{1\}$ دو عضو متفاوت هستند و آکولاد باعث این تفاوت شده است. در نتیجه این مجموعه دو عضو دارد.

ب) اگر عضو یک را در نظر بگیریم آنگاه با قرار دادن آکولاد برای آن زیر مجموعه خواهد بود یعنی: $\{1\} \rightarrow 1$
با در نظر گرفتن $\{1\}$ بعنوان عضو دیگر این مجموعه آنگاه: $\{\{1\}\} \rightarrow \{1\}$

نتیجه مهم: اگر عضوی خودش در آکولاد قرار داشت برای اینکه ساختار زیر مجموعه بودن به خود بگیرد به یک جفت آکولاد دیگر نیاز دارد.



$$A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } \{1 \text{ و } 2\}\}$$

الف. این مجموعه چند عضو دارد؟
ب) تعداد زیر مجموعه های، مجموعه A را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) این مجموعه سه عضو دارد. 1 ، 2 و $\{1 \text{ و } 2\}$ (به تاثیر آکولاد روی این عضو توجه کنید)

ب) طبق رابطه بیان شده در ایستگاه مطالعه: 2^n و اینکه $n = 3$ پس $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.

۹. با توجه به مجموعه $A = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } \{3 \text{ و } 2\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

$$\text{الف. } n(A) = 3 \quad \text{ب. } 2 \in A \quad \text{ج. } \{3 \text{ و } 2\} \subseteq A \quad \text{د. } \{2 \text{ و } \{3 \text{ و } 2\}\} \subseteq A$$

پاسخ: گزینه ج نادرست است در صورتی که $\{\{3 \text{ و } 2\}\} \subseteq A$ یا $\{3 \text{ و } 2\} \in A$ درست بود.

یک جمع بندی: **ارتباط تساوی دو مجموعه و مفهوم زیرمجموعه:**

با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه میتوان گفت: «اگر مجموعه A زیرمجموعه B و همچنین مجموعه B نیز زیر مجموعه A باشد، مجموعه A و B مساوی اند.

$$(B \subseteq A \text{ و } A \subseteq B) \rightarrow A = B$$

برعکس: اگر دو مجموعه $A=B$ باشند آنگاه A زیرمجموعه B و همچنین B زیرمجموعه A میباشد.

$$A = B \rightarrow (A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A)$$

مجموعه های عددی مهم:

در بحث مجموعه ها بیشمار مجموعه عددی میتوان نوشت. اما برخی از مجموعه ها پرکاربرد تر هستند، بنابراین این مجموعه ها را با اسامی و حروف خاصی نامگذاری میکنند برخی از این مجموعه ها عبارت اند از:

مجموعه اعداد **طبیعی** با حرف N نامگذاری میشود: $N = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\}$

مجموعه اعداد **حسابی** که با حرف W نامگذاری میشود: $W = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots\}$

مجموعه اعداد **صحیح** که با حرف Z نامگذاری میشود: $Z = \{\dots \text{ و } 2 \text{ و } 1 \text{ و } 0 \text{ و } -1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\}$

مجموعه اعداد طبیعی دو زیر مجموعه مهم دارد که عبارت اند از:

مجموعه اعداد **فرد طبیعی** که با حرف O نامگذاری میشود: $O = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } \dots\}$

مجموعه اعداد **زوج طبیعی** که با حرف E نامگذاری میشود: $E = \{2 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } \dots\}$

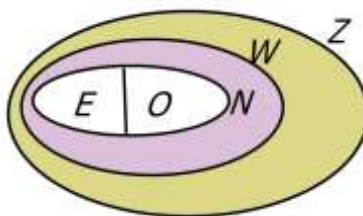


آقا علی: آقا اجازه ما در پایه هشتم خوندیم که مثلاً هر عدد طبیعی عددی صحیح است با توجه به این میشه گفت مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند؟

بله علی جان . و اگر بخوایم کلی تر بیان کنیم میشه گفت:

$$E \text{ و } O \subseteq N \subseteq W \subseteq Z$$

که اگر به اعضای این مجموعه ها و **نمودار ون** دقت کنی این رابطه قابل درک خواهد بود.



محدوده های عددی:

دانش آموزان عزیز شما با نمادهای $<$ و $\leq$ آشنا شده اید. با ترکیب کردن این نماد ها و یک متغیر محدوده ای عددی برای آن متغیر ساخته میشود. برای درک بهتر این موضوع به مثال های زیر دقت کنید:

مثال ۱: $x \leq -3$ اعداد مورد نظر کوچکتر یا مساوی ۳- هستند.

مثال ۲: $-3 < x < 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و از ۴ کوچکتر هستند.

مثال ۳: $-3 < x \leq 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.

مثال ۴: $-3 \leq x < 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند.

مثال ۵: $-3 \leq x \leq 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.

ایستگاه حل سوال



۱. هر کدام از محدوده های عددی با توجه به شرط مشخص شده چه اعدادی را مشخص میکند.

(ب) $x \in \mathbb{W}$ و $-3 \leq x < 4$

(الف) $x \in \mathbb{N}$ و $-3 \leq x < 4$

(د) $x \in \mathbb{W}$ و $3 \leq x$

(ج) $x \in \mathbb{Z}$ و $-3 \leq x < 4$

پاسخ: (الف) اعدادی که مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند فقط بایستی در نظر داشت که این اعداد طبیعی هستند در نتیجه: اعداد ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

(ب) مشابه قسمت الف اعدادی مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ باشد به شرط آنکه این اعداد، عدد حسابی باشند. در نتیجه: اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

(ج) اعداد مد نظر بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند به شرط آنکه این اعداد، عدد صحیح باشند. در نتیجه: اعداد: ۳- و ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

(د) اعداد مورد نظر بزرگتر مساوی سه و عدد حسابی هستند در نتیجه: اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ... را مشخص میکند.

ایستگاه مطالعه

نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی:

ابتدای فصل عبارت های کلامی را آموختیم که یک مجموعه را مشخص میکردند حال میخواهیم عبارت های ریاضی (جبری) را بیاموزیم که یک مجموعه را با استفاده از علائم و نماد ها توضیح میدهند. هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را بصورت جبری نمایش میدهد معمولاً به صورت زیر نوشته میشود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قسمت دوم} \\ \text{قسمت اول} \end{array} \right\}$$

قسمت اول: یک الگو یا رابطه ی کلی است که با استفاده از آن اعضا مجموعه را تعیین میکنیم.

خط عمودی « | » که دو قسمت را از هم جدا میکند « بطوری که یا به شرطی که » خوانده میشود.

قسمت دوم: یک محدوده عددی برای ما مشخص میکند که اعداد این محدوده را در رابطه ای که در قسمت اول آمده قرار میدهیم تا اعضا مشخص شوند.

مثال ۱: اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq x < 5\}$$

محدوده عددی

$$X = 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4$$

رابطه ای مشخص کننده اعضا

پاسخ:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq x < 5\}$$

نحوه خواندن مجموعه: اعدادی (X هایی) عضو مجموعه A است بطوریکه این اعداد، طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ و

کوچکتر از ۵ باشند. در نتیجه: $A = \{2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\}$



آقا علی: آقا اجازه یعنی محدوده عددی همون اعضای مجموعه ست؟

علی جان در این مثال اینطور بود. از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش اینه که برای هر سوالی محدوده رو بعنوان اعضای مجموعه در نظر میگیرن. بطور کلی همیشه اینو گفت به مثال های بعدی توجه کنید:

$$B = \{-x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 < x \leq 5\}$$

پاسخ: نحوه ی خواندن مجموعه: قرینه اعدادی (X-هایی) عضو مجموعه B است بشرطی که خود اعداد طبیعی و بزرگتر مساوی ۲ و کوچکتر از ۵ هستند.

$$x = 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \rightarrow -x = -3 \text{ و } -4 \text{ و } -5$$

$$B = \{-3 \text{ و } -4 \text{ و } -5\} \quad \text{در نتیجه مجموعه } B:$$

توجه: در صورتی که رابطه ی مجموعه در قسمت اول پیچیده بود برای اینکه بدون اشتباه بتوانید اعضا هر مجموعه تعیین کنید میتوانید از جدول زیر استفاده کنید:

اعداد محدوده ای که در قسمت دوم مشخص شده اند	؟	؟	...
جایگذاری رابطه ای که در قسمت اول بیان شده است	؟	؟	..

مثال ۳: اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

$$A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq x < 5\}$$

پاسخ: عبارت $2 \leq x < 5$ و $x \in \mathbb{N}$ محدود عددی را مشخص میکند که باید در عبارت $2x + 1$ جایگذاری کنیم تا اعضا مشخص شود. محدوده عددی که برای ما مشخص میشود: ۲ و ۳ و ۴ میباشد که با استفاده از جدول زیر اعضای مجموعه را تعیین میکنیم.

x	۲	۳	۴
$2x + 1$	$2 \times 2 + 1 = 5$	$2 \times 3 + 1 = 7$	$2 \times 4 + 1 = 9$

$$A = \{5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\} \quad \text{مجموعه } A:$$

ایستگاه حل سوال

۱. اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.

الف) $M = \{3x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -3 < x \leq 0\}$

ب) $B = \{5x - 2 \mid x \in \mathbb{W} \text{ و } x < 4\}$

ج) $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -2 < x \leq 2\}$

د) $W = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$



پاسخ:

الف) $M = \{0 \text{ و } -3 \text{ و } -6\}$

x	-۲	-۱	۰
$3x$	$3 \times (-2) = -6$	$3 \times (-1) = -3$	$3 \times 0 = 0$

(ب)

$$B = \{-2 \text{ و } 3 \text{ و } 8 \text{ و } 13\}$$

x	۰	۱	۲	۳
$5x - 2$	$5 \times 0 - 2 = -2$	$5 \times 1 - 2 = 3$	$5 \times 2 - 2 = 8$	$5 \times 3 - 2 = 13$

x	-1	0	1	2
x^2	$(-1)^2 = 1$	0	1	4

(ج)

دقت کنید عضو 1 تکرار شد.

$$C = \{0, 1, 4\}$$

(د)

x	1	2	...
$x - 1$	$1 - 1 = 0$	$2 - 1 = 1$	...

$$W = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ایستگاه مطالعه

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:

در این حالت اعضای مجموعه مشخص است و از ما میخواهند که زبان ریاضی مجموعه را بیان کنیم. برای این کار ابتدا رابطه ی بین اعضا را با استفاده از الگویابی مشخص میکنیم، سپس با توجه به رابطه محدوده عددها را مشخص میکنیم.

مثال ۱: مجموعه $A = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ: با توجه به اعضا: $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ و } -5 \leq x \leq 2\}$

مثال ۲: مجموعه $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ (مجموعه اعداد زوج طبیعی) را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ:



ابتدا رابطه ی بین اعضا را تعیین میکنیم: $2k \rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$

حال محدوده مناسب را برای متغیر k در نظر میگیریم که: $k \in \mathbb{N}$ و $1 \leq k$

در نتیجه: $E = \{2k | k \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq k\}$

مثال ۳: مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) مجموعه اعداد فرد طبیعی (ب) $B = \{45, 30, 15, 0, \dots\}$

پاسخ:

الف) اعداد طبیعی فرد عبارت اند از ۱ و ۳ و ۵ و ...

پس رابطه بین اعداد $2k - 1$ میباشد. برای محدوده ای که k از آن انتخاب میشود نیز میتوان اعداد طبیعی را در

نظر گرفت. در نتیجه: $O = \{2k - 1 | k \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq k\}$

ب) رابطه ی بین $5x$ برای تعیین محدوده ای که x از آن انتخاب میشود با تقسیم اعضا به ۵ میتوان دریافت که:

$$B = \{5x | x \in \mathbb{Z} \text{ و } -7 < x \leq 9\}$$

مجموعه اعداد گویا و نمایش جبری آن

تعریف اعداد گویا: هر عدد که بتوان بصورت کسری نوشت بطوریکه صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج عددی غیر صفر باشد را عدد گویا می نامیم.

مجموعه اعداد گویا: مجموعه ایست شامل همه ی اعداد گویا که با حرف $\mathbb{Q}$ نامگذاری میشود.

نمایش جبری مجموعه اعداد گویا:
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ و } b \neq 0 \right\}$$

نکته : در پایه هشتم خواندید که هر عدد صحیح ، عدد گویاست (چون میتوانیم برای آن مخرج یک قرار دهیم) پس میتوان گفت مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد گویا هستند.

به نمودار ون و رابطه زیر دقت کنید:

$$\mathbb{E} \cup \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در فصل دوم بیشتر با مجموعه اعداد گویا بیشتر آشنا خواهید شد.

برای درک بهتر مفاهیم کاردرکلاس صفحه: ۶ و ۸ تمرین صفحه: ۱۰ را حل کنید.



اشتراک مجموعه ها:

گفت و گو: آقا علی میخوایم کار امروز را با بررسی یک سوال شروع کنیم

دو مجموعه $D = \{1 و 2 و 3\}$ و $C = \{2 و 3 و 4\}$ را در نظر بگیرید. آیا عبارت: «عضوهای مشترک مجموعه های D و C» مشخص کننده ی یک مجموعه است؟

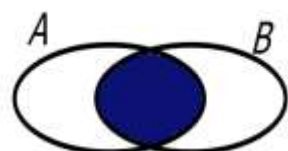


آقا علی: آقا اجازه ، بله آقا چون اعضاء مشترکشان کاملا مشخصه (اعداد 2 و 3)، پس میشه مجموعه ی $\{2, 3\}$

ایستگاه مطالعه

آفرین علی جان حالا به توضیحات من توجه کنید:

تعریف اشتراک دو مجموعه A و B: مجموعه ای است که شامل همه عضوهایی که هم عضو A هستند و هم عضو مجموعه B و آن را با نماد $A \cap B$ (میخوانیم A اشتراک B) نمایش میدهیم.



$A \cap B$

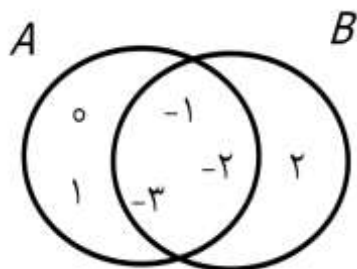
$$A \cap B = \{x | x \in A و x \in B\}$$

نمایش به زبان ریاضی:

مثال 1: دو مجموعه $D = \{1 و 2 و 3\}$ و $C = \{2 و 3 و 4\}$ را در نظر بگیرید. اشتراک این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

$$C \cap D = \{2 و 3 و 4\} \cap \{1 و 2 و 3\} = \{2 و 3\}$$

پاسخ:



مثال 2: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

پاسخ: با توجه به نمودار ون سه عدد 1- و 2- و 3- در قسمت مشترک مجموعه ها قرار دارند پس:

$$A \cap B = \{-1 و -2 و -3\}$$

مثال ۳: با توجه به مجموعه های A و B و C تساوی های زیر را تکمیل کنید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{و} \quad B = \{6, 8, 7, 4, 5\} \quad \text{و} \quad C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$A \cap B =$$

$$A \cap C =$$

$$B \cap C =$$

$$A \cap B \cap C =$$

پاسخ:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 8, 7, 4, 5\} = \{4, 5\}$$

$$A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$$

$$B \cap C = \{6, 8, 7, 4, 5\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{4, 6, 8\}$$

دقت شود که مفهوم $A \cap B \cap C$ ، مجموعه عضو های مشترک سه مجموعه A و B و C است.

$$A \cap B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 8, 7, 4, 5\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{4\}$$

نکته ۱: واضح است اشتراک مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cap A = A$

نکته ۲: اشتراک هر مجموعه با مجموعه تهی، تهی می باشد چون تهی با هیچ مجموعه ای عضو مشترک ندارد.

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

نکته ۳: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم، اشتراک این دو مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آنهاست.

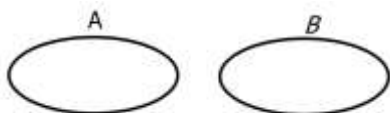
$$(A \cap B) \subseteq A \quad \text{و} \quad (A \cap B) \subseteq B$$

چون هر عضو اشتراک دو مجموعه A و B ، در هر کدام از مجموعه های A و B قرار دارد.

تعریف دو مجموعه مجزا (جدا از هم): اگر دو مجموعه A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی

$$A \cap B = \emptyset$$

آنگاه مجموعه های A و B را جدا از هم می گوئیم و نمودار ون آنها بصورت زیر است:



مثال: مجموعه های E (اعداد زوج طبیعی) و O (اعداد فرد طبیعی) مجزا هستند.

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \{a + 1 \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } 2 < a \leq 5\}$ و $B = \{\frac{b}{4} \mid b = 4 \text{ و } 6 \text{ و } 8\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای A و B را تعیین کنید.



ب) مجموعه $A \cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.

$$A = \{4 \text{ و } 5 \text{ و } 6\} \quad \text{و} \quad B = \{2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\}$$

$$A \cap B = \{4 \text{ و } 5 \text{ و } 6\} \cap \{2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\} = \{4\} \quad \text{ب)}$$

۲. اگر مجموعه A ، اعداد حسابی زوج یک رقمی و مجموعه B ، اعداد اول یک رقمی و مجموعه C ، اعداد طبیعی فرد یک رقمی باشد؛

الف) مجموعه A و مجموعه جدا از هم هستند. (C, B)

ب) تساوی های زیر را کامل کنید:

$$n(A) = \quad B \cap C = \quad n(B \cap C) =$$

$$n(A \cap B) = \quad n(A \cap B \cap C) =$$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A = \{0 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } 6 \text{ و } 8\} \quad \text{و} \quad B = \{2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7\} \quad \text{و} \quad C = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}$$

الف) C ، چون مجموعه های A و C عضو مشترکی ندارند.

ب) $n(B \cap C)$ یعنی تعداد عضوهای مشترک B و C ، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

$$n(A) = 5 \quad B \cap C = \{3 \text{ و } 5 \text{ و } 7\} \quad n(B \cap C) = n(\{3 \text{ و } 5 \text{ و } 7\}) = 3$$

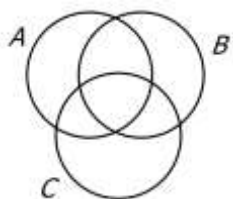
تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه جدا از هم صفر است در نتیجه:

$$n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$$

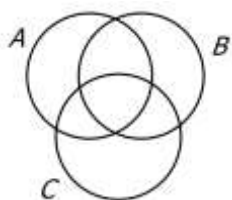
$$n(A \cap B \cap C) = n(\emptyset) = 0$$

پاسخ در این سوال بصورت کامل پاسخ نوشته شده است، در امتحان بصورت $n(B \cap C) = 3$ نوشته شود، کفایت می کند.

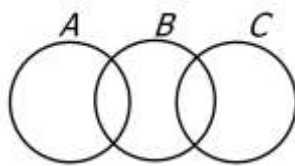
۳. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:



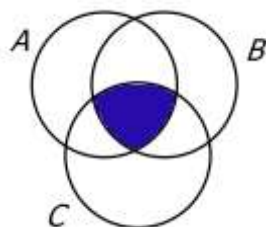
$$A \cap B \cap C$$



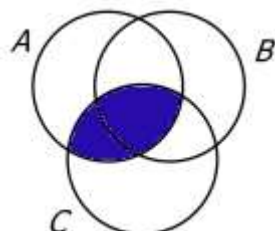
$$A \cap C$$



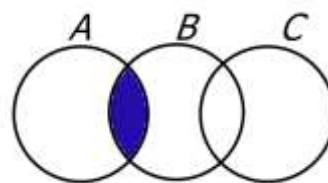
$$A \cap B$$



$$A \cap B \cap C$$



$$A \cap C$$



$$A \cap B$$

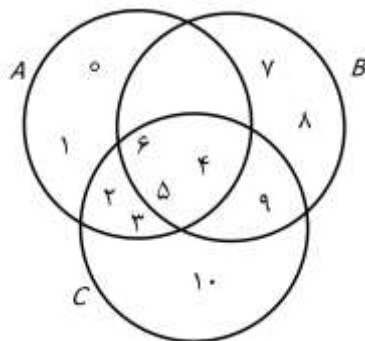
پاسخ:

۴. مجموعه های $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

و $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ را روی نمودار ون نمایش دهید:

پاسخ: بهتر است ابتدا $A \cap B \cap C$ و $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ را مشخص کنیم و سپس با نوشتن عضوهای باقی مانده نمودار را کامل کنیم:

اعداد ۴ و ۵ و ۶ به هر سه مجموعه تعلق دارند پس در قسمت $A \cap B \cap C$ این سه عدد را می نویسیم.



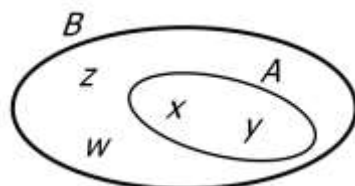
بقیه ی عضوهای مشترک A و C اعداد ۲ و ۳ هستند.

بقیه ی عضوهای مشترک B و C عدد ۹ است.

بنابراین داریم:

ایستگاه مطالعه

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.



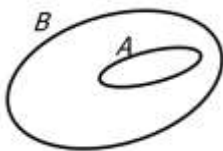
$$A \cap B =$$

پاسخ:

$$A \cap B = \{x, y\} = A$$

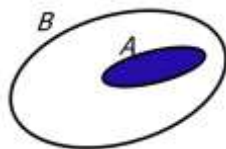
نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه اشتراک A و B برابر مجموعه A است؛ چون اعضای A در هر دو مجموعه قرار دارند.

ایستگاه حل سوال



۱. در نمودار ون مقابل $A \cap B$ را هاشور بزنید.

پاسخ: چون A زیرمجموعه B است پس:



۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \quad \mathbb{N} \cap \{0, -1, -2, \dots\} =$$

پاسخ: با توجه به اینکه: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \cap \{0, -1, -2, \dots\} = \emptyset$$

ایستگاه مطالعه

اجتماع مجموعه ها:

گفت و گو: علی جان مجموعه های $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ بدین:

الف) آیا عدد ۲ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟



آقا اجازه بله آقا چون در دو مجموعه قرار دارد.

ب) آیا عدد ۰ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟



آقا اجازه بله چون در مجموعه A قرار دارد.

پ) یک مجموعه تشکیل دهید که اعضا آن حداقل در یکی از مجموعه های A و B قرار داشته باشد.

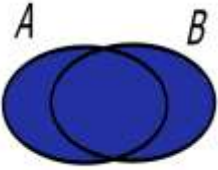


آقا اجازه مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ اعضایی که داره حداقل در یکی از دو مجموعه عضو هستند.

آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

اجتماع دو مجموعه A و B : اجتماع در لغت به معنای **در یک جا جمع شدن** است، در مجموعه ها نیز اگر اعضای مجموعه های A و B را درون یک مجموعه بنویسیم (اعضای تکراری یک بار نوشته شوند) به آن مجموعه اجتماع A و B میگوییم. به بیان دیگر مجموعه ای شامل همه عضو هایی که **حداقل** در یکی از مجموعه های A یا B باشند، را اجتماع دو مجموعه A و B می نامیم و آن را با نماد $A \cup B$ نشان میدهیم.

نمایش به زبان ریاضی: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$ نمایش با استفاده از نمودار ون:

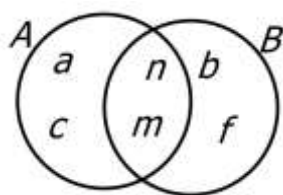


$A \cup B$

مثال ۱: دو مجموعه $D = \{۱ و ۲ و ۳\}$ و $C = \{۲ و ۳ و ۴\}$ را در نظر بگیرید. اجتماع این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

پاسخ: دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C \cup D = \{۲ و ۳ و ۴\} \cap \{۱ و ۲ و ۳\} = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$$



مثال ۲: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

$$A \cup B = ?$$

پاسخ: $A \cup B = \{a و b و c و f و m و n\}$

نکته ۱: واضح است اجتماع مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cup A = A$

نکته ۲: اجتماع مجموعه دلخواه A با مجموعه تهی، مجموعه A میباشد چون تهی هیچ عضوی ندارد که به اجتماع اضافه کند، و اعضای اجتماع همان اعضای مجموعه A هستند. $A \cup \emptyset = A$

نکته ۳: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم: $B \subseteq (A \cup B)$ و $A \subseteq (A \cup B)$

چون هر عضو مجموعه A و B ، در اجتماعشان قرار دارد.

مثال: $A = \{۰ و ۱\}$ و $B = \{۱ و ۲\}$ را در نظر بگیرید.

$$A \cup B = \{۰ و ۱ و ۲\}$$

در نتیجه: $\{۱ و ۲\} \subseteq \{۰ و ۱ و ۲\}$ و $\{۰ و ۱\} \subseteq \{۰ و ۱ و ۲\}$

$B \quad A \cup B \quad A \quad A \cup B$

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \{a^2 + 1 \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq a \leq 4\}$ و $B = \{2b \mid b = 4 \text{ و } 5\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای A و B را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A \cup B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.



$$A = \{5 \text{ و } 10 \text{ و } 17\} \quad \text{و} \quad B = \{8 \text{ و } 10\}$$

$$A \cap B = \{5 \text{ و } 10 \text{ و } 17\} \cup \{8 \text{ و } 10\} = \{5 \text{ و } 10 \text{ و } 17 \text{ و } 8\} \quad \text{ب)}$$

۲. اگر مجموعه A ، اعداد اول زوج و مجموعه B ، اعداد طبیعی فرد یک رقمی و مجموعه C ، $\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\}$ باشد؛

تساوی های زیر را کامل کنید:

$$B \cup C = \quad \quad \quad n(B \cup C) =$$

$$n(A \cup B) = \quad \quad \quad n(A \cup B \cup C) =$$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A = \{2\} \quad \text{و} \quad C = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4\} \quad \text{و} \quad B = \{1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}$$

$n(B \cup C)$ یعنی تعداد عضوهای اجتماع B و C ، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

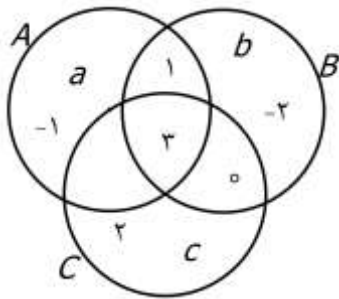
$$B \cup C = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\} \quad n(B \cup C) = n(\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}) = 6$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(\{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9\}) = 7$$

در این سوال به صورت کامل پاسخ نوشته شده است. در امتحان پاسخ به صورت $n(A \cup B) = 6$ نوشته شود، کفایت می کند.

۳. با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.

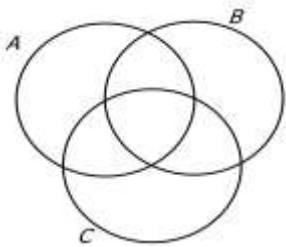


$$A \cup B =$$

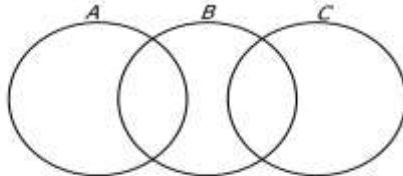
$$B \cup C =$$

پاسخ:

$$A \cup B = \{a, b, -1, -2, 0, 1, 3\} \quad B \cup C = \{b, c, -2, 0, 1, 2, 3\}$$



$$A \cup C$$

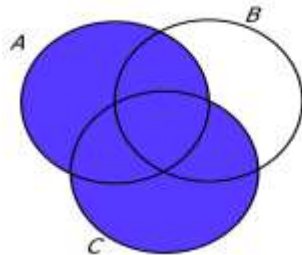


$$A \cup B \cup C$$

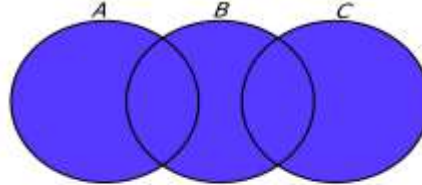
۴. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:



پاسخ:



$$A \cup C$$



$$A \cup B \cup C$$

ایستگاه مطالعه

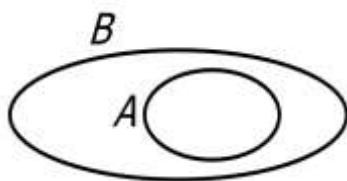
مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$$A \cup B =$$

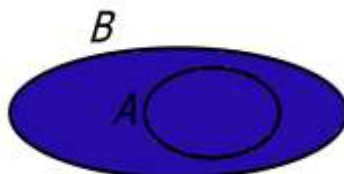
پاسخ:

$$A \cup B = \{w, x, y, z\} = B$$

نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه اجتماع A و B برابر مجموعه B است.



۱. در نمودار ون مقابل $A \cup B$ را هاشور بزنید.



پاسخ: چون A زیرمجموعه B است پس:

۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{W} = \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{W} \cup \mathbb{N} = \quad \mathbb{N} \cup \{0 \text{ و } -1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\} =$$

پاسخ: با توجه به اینکه: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{W} = \mathbb{W} \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \quad \mathbb{Z} \cup \mathbb{W} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \cup \{0 \text{ و } -1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\} = \{ \dots \text{ و } -2 \text{ و } -1 \text{ و } 0 \text{ و } 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \} = \mathbb{Z}$$

ایستگاه مطالعه

تفاضل مجموعه ها:

گفت و گو: علی جان مجموعه های $A = \{0 \text{ و } 1 \text{ و } 2\}$ و $B = \{2 \text{ و } 3\}$ را در نظر بگیرید و به سوال پاسخ بدین:

الف) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در مجموعه A هستند ولی در مجموعه B نیستند؟



آقا اجازه ۲ هم در A و هم در B است، پس ۲ رو از اعضای A حذف میکنیم و جواب میشه: $\{0 \text{ و } 1\}$

ب) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در B هستند ولی در A نیستند؟



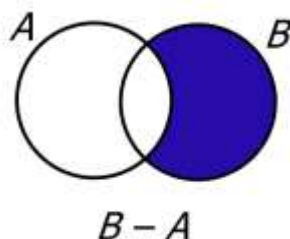
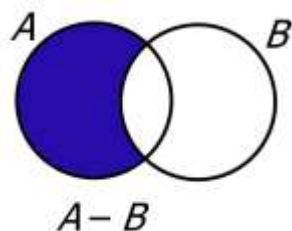
آقا اجازه همون طور که گفتیم عدد ۲ در هر دو مجموعه قرار داره پس اونو از اعضای B حذف میکنیم، پس مجموعه مد نظر میشه: $\{3\}$

آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

تعریف تفاضل دو مجموعه: $A - B$ (منهای B از A) مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی است که عضو مجموعه A هستند ولی عضو مجموعه B نیستند. بصورت مشابه: $B - A$ (منهای A از B) شامل همه ی عضوایی است که عضو مجموعه B هستند ولی عضو مجموعه A نیستند.

به زبان ریاضی: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$ و $B - A = \{x \mid x \in B \text{ و } x \notin A\}$

به نمودار ون زیر توجه کنید:



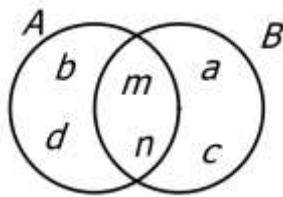
مثال ۱: دو مجموعه $D = \{۱ و ۲ و ۳\}$ و $C = \{۲ و ۳ و ۴\}$ را در نظر بگیرید. اعضای هر کدام از مجموعه های زیر را تعیین کنید.

پاسخ: دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C - D = \{\cancel{۲} و \cancel{۳} و ۴\} - \{\cancel{۱} و \cancel{۲} و \cancel{۳}\} = \{۴\}$$

$$D - C = \{\cancel{۱} و \cancel{۲} و \cancel{۳}\} - \{\cancel{۲} و \cancel{۳} و ۴\} = \{۱\}$$

نتیجه مهم: یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش این است که تصور میکنند $A - B = B - A$ ؛
در حالت کلی اگر $A \neq B$ آنگاه $A - B \neq B - A$



مثال ۲: با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.

$$A - B = ? \quad B - A = ?$$

پاسخ: $A - B = \{b و d\}$ و $B - A = \{a و c\}$

نکته ۱: برای مجموعه دلخواه A و تهی ($\emptyset$) روابط مقابل را میتوان بیان کرد: $A - A = \emptyset$ و $A - \emptyset = A$

نکته ۲: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$(A - B) \subseteq A \quad و \quad (B - A) \subseteq B$$

مثال: $A = \{۰ و ۱\}$ و $B = \{۱ و ۲\}$ را در نظر بگیرید. $A - B = \{۰\}$ همانطور که ملاحظه کردید $A - B \subseteq A$ برای درستی رابطه ی $B - A \subseteq B$ مثالی بیان کنید.

نکته ۳: در صورتی که A و B دو مجموعه جدا از هم باشند می توان گفت: $(A - B) = A$ و $(B - A) = B$

مثال: $A = \{۰ و ۱\}$ و $B = \{-۱ و ۲\}$ را در نظر بگیرید.

$$A - B = \{۰ و ۱\} - \{-۱ و ۲\} = \{۰ و ۱\} = A$$

$$B - A = \{-۱ و ۲\} - \{۰ و ۱\} = \{-۱ و ۲\} = B$$

۱. مجموعه های $A = \{a^2 + 1 \mid a \in \mathbb{N}, -3 < a \leq 3\}$ و $B = \{b + 1 \mid b = 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5\}$ را در نظر بگیرید:



الف) اعضای A و B را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A - B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

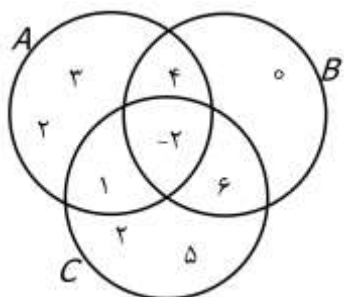
پ) $n(B - A) = ?$

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید. در مجموعه A اعداد -2 و -1 و 0 در محدوده قرار نمیگیرند چون عدد طبیعی نیستند.

$$A = \{2, 5, 10\} \quad \text{و} \quad B = \{4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{2, 5, 10\} - \{4, 5, 6\} = \{2, 10\} \quad \text{ب)}$$

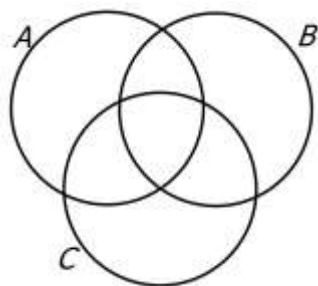
$$n(B - A) = 2 \quad \text{ج)}$$



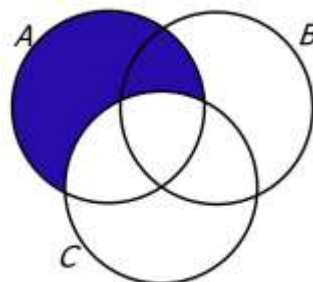
۲. با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های مقابل را تعیین کنید.

$$A - B = \quad \quad \quad B - C =$$

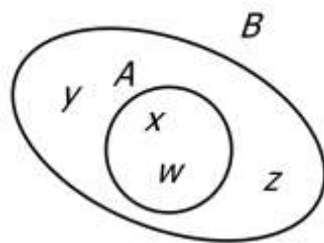
$$A - B = \{1, 2, 3\} \quad \text{و} \quad B - C = \{0, 4\} \quad \text{پاسخ:}$$



۳. در نمودار ون مقابل مجموعه ی $A - C$ را در نمودار هاشور بزنید:



پاسخ:



مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$$A - B =$$

پاسخ:

$$A - B = \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x}\} - \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x} \text{ و } y \text{ و } z\} = \emptyset$$

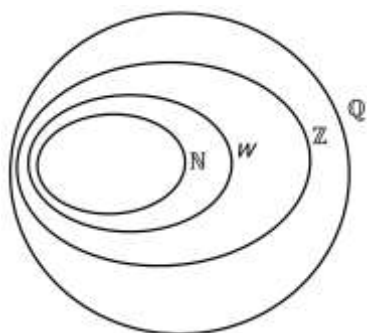
نتیجه: اگر A زیرمجموعه B باشد ($A \subseteq B$) آنگاه A منهای B برابر مجموعه تهی است.



۱. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Q} =$$



پاسخ: طبق نمودار ون مقابل داریم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

پس طبق نتیجه بالا:

$$\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$$

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$$

۲. آیا تساوی های زیر درست هستند؟ چرا؟

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \text{ (الف)}$$

$$\mathbb{N} - \{-1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\} = \emptyset \text{ (ب)}$$

پاسخ:

الف) نادرست_ نماد آکولاد برای عدد صفر قرار داده نشده. در نتیجه صورت درست آن: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$

ب) نادرست مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد $\{-1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\}$ دو مجموعه جدا از هم هستند. در نتیجه

$$\mathbb{N} - \{-1 \text{ و } -2 \text{ و } \dots\} = \mathbb{N} \text{ صورت درست آن:}$$



سوالات ترکیبی بخش سوم:

۱. با توجه به مجموعه های A و B و C اعضای هر قسمت را تعیین کنید.

$$A = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} \quad و \quad B = \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} \quad و \quad C = \{۰ و ۱\}$$

الف) $(A \cup C) - B = ?$

ب) $(A - B) \cup (B - A) = ?$

ج) $(A \cap C) \cup B = ?$

پاسخ: برای حل اینگونه سوالات ابتدا تکلیف پراتنز ها را روشن کنید.

الف) $A \cup C = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} \cup \{۰ و ۱\} = \{۰ و ۱ و ۲ و ... و ۶\}$ در نتیجه:

$$(A \cup C) - B = \{۰ و ۱ و ۲ و ... و ۶\} - \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۳ و ۵\}$$



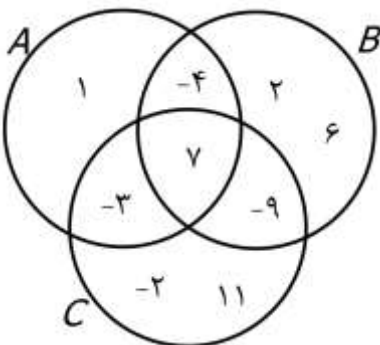
ب) $(A - B) = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} - \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۳ و ۵\}$ و

$(B - A) = \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} - \{۱ و ۲ و ... و ۶\} = \{۰\}$ در نتیجه:

$$(A - B) \cup (B - A) = \{۱ و ۳ و ۵\} \cup \{۰\} = \{۰ و ۱ و ۳ و ۵\}$$

ج) $(A \cap C) = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} \cap \{۰ و ۱\} = \{۱\}$ در نتیجه:

$$(A \cap C) \cup B = \{۱\} \cup \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۰ و ۲ و ۴ و ۶\}$$



۲. با توجه به نمودار ون اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.

$$A \cup (B - C) = ? \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = ?$$

پاسخ: ابتدا تکلیف پراتنز ها را روشن می کنیم:

$$B - C = \{-۴ و ۲ و ۶\} \quad A \cap B = \{-۴ و ۷\} \quad A \cap C = \{-۳ و ۷\} \quad B \cap C = \{۷ و -۹\}$$

بنابراین:

$$A \cup (B - C) = \{۱ و -۴ و ۷ و -۳ و ۲ و ۶\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{-۳ و -۴ و ۷ و -۹\}$$



۳. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$$(N - W) \cup Z = ?$$

$$(Z \cup Q) \cap (N \cup W) = ?$$

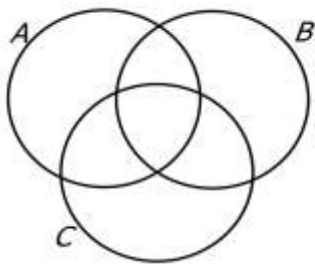


پاسخ:

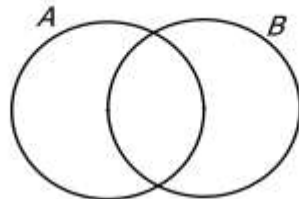
$$(N - W) \cup Z = \emptyset \cup Z = Z$$

$$(Z \cup Q) \cap (N \cup W) = Q \cap W = W$$

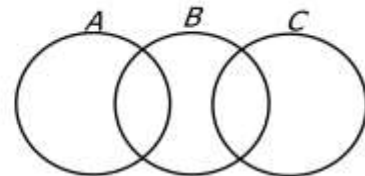
۴. مجموعه های داده شده را روی نمودار ون هاشور بزنید.



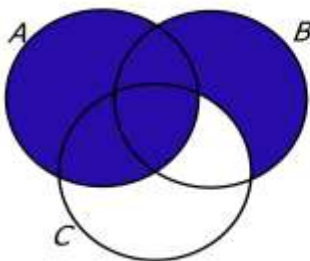
$$A \cup (B - C)$$



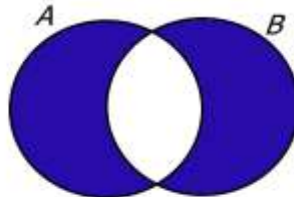
$$(A - B) \cup (B - A)$$



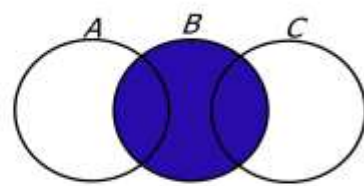
$$(A \cap C) \cup B$$



$$A \cup (B - C)$$



$$(A - B) \cup (B - A)$$



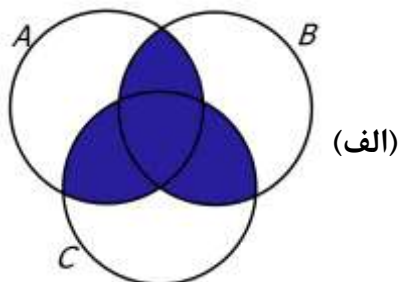
$$(A \cap C) \cup B$$

پاسخ:

دقت کنید چون دو مجموعه A و C مجزا هستند پس $A \cap C = \emptyset$ و $B \cup (A \cap C) = B \cup \emptyset = B$

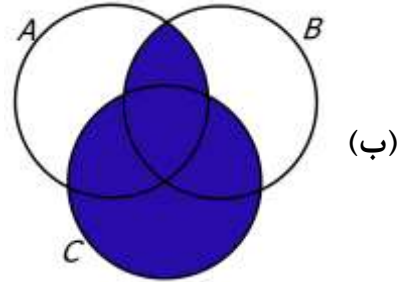


۵. قسمت هاشور خورده در هر شکل چه مجموعه ای را مشخص میکند.



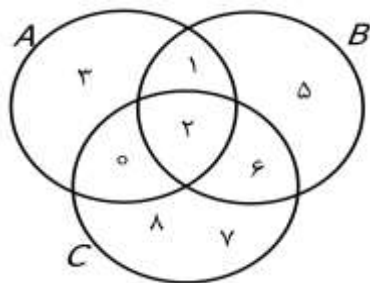
(الف)

(الف): $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$



(ب)

پاسخ: (ب): $C \cup (A \cap B)$



۶. با توجه به نمودار مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مجموعه ی $(A - B) \cap (C - B)$ را با اعضاء مشخص کنید.

ب) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱) $7 \in (A - C) \dots$ ۲) $\{2 \text{ و } 6\} \subseteq (B \cap C) \dots$ ۳) $3 \in (B \cup C) \dots$

پاسخ:



الف) $(A - B) \cap (C - B) = \{3 \text{ و } 0\} \cap \{0 \text{ و } 8 \text{ و } 7\} = \{0\}$

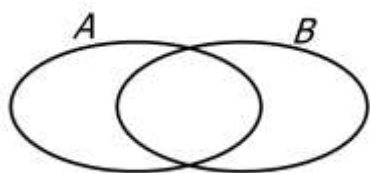
ب)

۱) $A - C = \{3 \text{ و } 1\}$ بنابراین رابطه **نادرست** است چون ۷ به این مجموعه تعلق ندارد.

۲) $B \cap C = \{2 \text{ و } 6\}$ و هر مجموعه ای زیرمجموعه ی خودش است پس رابطه **درست** است.

۳) $B \cup C = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } 7 \text{ و } 8 \text{ و } 0\}$ و عدد ۳ به این مجموعه تعلق ندارد پس عبارت **نادرست** است.

۷. نمودار ون مقابل را با اطلاعات داده شده کامل کنید.

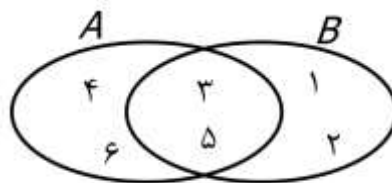
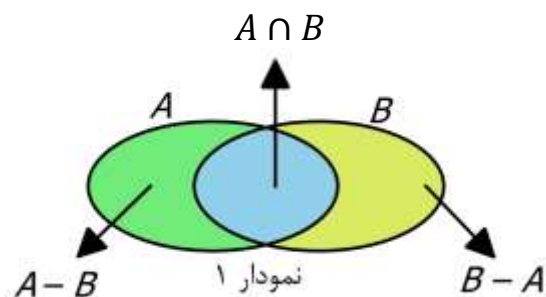


$A \cap B = \{3 \text{ و } 5\}$ و $A - B = \{4 \text{ و } 6\}$ و $B - A = \{1 \text{ و } 2\}$

پاسخ:

دقت کنید در نمودار شماره ۱ مجموعه های سوال مشخص شده اند.

بنابراین پاسخ طبق نمودار شماره ۲ است.



برای درک بهتر مطالب کار در کلاس صفحه ۱۳ و تمرین صفحه ۱۴ را حل کنید.

احتمال: برای نشان دادن احتمال روی دادن یک اتفاق (پیشامد)، از یک نسبت (کسر) استفاده میکنیم. این نسبت

به صورت مقابل است:
$$\text{احتمال روی دادن اتفاق (رابطه ۱)} = \frac{\text{تعداد حالت های مورد نظر}}{\text{تعداد تمام حالت های ممکن}}$$

برای بدست آوردن احتمال رخ دادن یک اتفاق مانند A ، میتوان همه ی حالت های ممکن را در یک مجموعه به نام S (که به آن فضای نمونه ای گفته می شود) بنویسیم و همه ی حالت های مورد نظر در یک مجموعه (مثلاً با نام A) بنویسیم، آن گاه احتمال روی دادن اتفاق A را که با $P(A)$ نشان میدهم به صورت زیر نمایش میدهم که معادل رابطه ی ۱ می باشد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

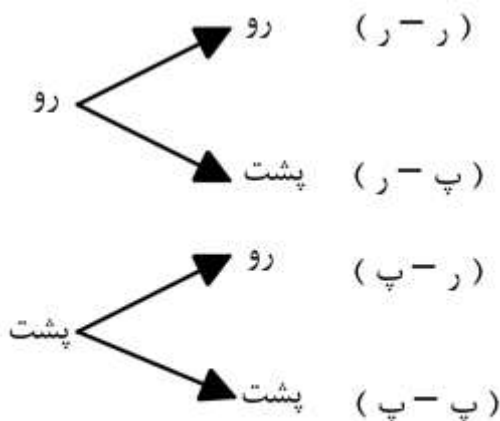
→ عدد اصلی مجموعه A (تعداد حالت های روی دادن A)
← احتمال روی دادن اتفاق A
→ عدد اصلی مجموعه S (تعداد کل حالت های ممکن)

مثال ۱: مجموعه حالت های ممکن (S) را برای هر یک از قسمت های زیر تشکیل دهید. و $n(S)$ را تعیین کنید.

الف) پرتاب دو سکه (ب) پرتاب یک تاس

پ) پرتاب دو تاس (ت) پرتاب یک سکه و یک تاس

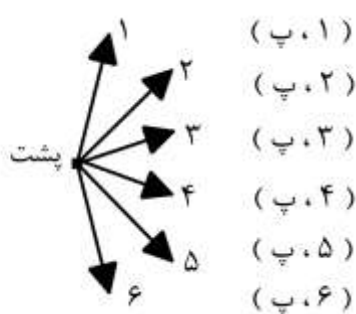
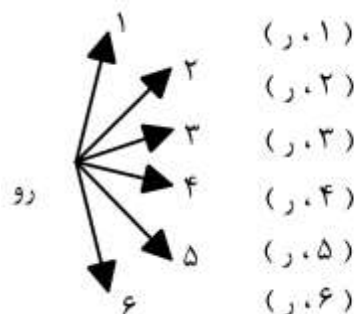
پاسخ: در پایه هشتم آموختید برای تعیین تعداد کل حالات میتوان از نمودار درختی یا جدول استفاده کرد؛ مثلاً:



نمودار درختی پرتاب دو سکه

تاس ۱ \ تاس ۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

جدول حالت های ممکن پرتاب دو تاس



نمودار درختی پرتاب یک سکه و یک تاس

الف) $S = \{(پ، پ) و (پ، ر) و (ر، پ) و (ر، ر)\}$ در نتیجه: $n(S) = 4$

ب) $S = \{1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6\}$ در نتیجه: $n(S) = 6$

پ) $n(S) = 36$

ت) $S = \{(پ، 1) و (پ، 2) و ... و (پ، 6) و (ر، 1) و (ر، 2) و ... و (ر، 6)\}$ در نتیجه: $n(S) = 12$

نتیجه ۱: تعداد کل حالت‌ها: الف) اگر n سکه را پرتاب کنیم: $n(S) = 2^n$ ؛ ب) اگر m تاس را پرتاب کنیم: $n(S) = 6^m$ ؛ ج) اگر n سکه و m تاس را با هم پرتاب کنیم: $n(S) = 2^n \times 6^m$ میباشد.

مثال ۲: اگر سه سکه و یک تاس را پرتاب کنیم، تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید.

پاسخ: $n(S) = 2^3 \times 6^1 = 8 \times 6 = 48$

مثال ۳: اگر تاسی را بیندازیم چقدر احتمال دارد؟

الف) عدد رو شده مضرب ۲ باشد. ب) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد.

پ) عدد رو شده از ۷ کوچکتر باشد. ت) عدد رو شده شمارنده ۴ باشد.

پاسخ: ابتدا مجموعه کل حالت‌های ممکن را تشکیل می‌دهیم؛

$S = \{1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6\}$ در نتیجه: $n(S) = 6$

الف) مضارب ۲ که روی تاس هستند عبارت‌اند از: ۲ و ۴ و ۶ در نتیجه این پیشامد را با مجموعه A مشخص می‌کنیم:

$A = \{2 و 4 و 6\}$ پس: $n(A) = 3$ در نتیجه: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ب) هیچ عددی روی تاس از ۶ بزرگتر نیست در نتیجه: $n(B) = 0 \rightarrow B = \emptyset$ پس $P(B) = \frac{0}{6} = 0$

پ) همه ی اعداد روی تاس از ۷ کوچکتر هستند در نتیجه:

$C = \{1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6\} \rightarrow n(C) = 6 \rightarrow P(C) = \frac{6}{6} = 1$

ت) $D = \{1 و 2 و 4\} \rightarrow n(D) = 3 \rightarrow P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

نکته: به هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد می‌گوییم. به طور مثال در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $S = \{\text{پشت} , \text{رو}\}$ این مجموعه دو عضو و بنابراین $2^2 = 4$ زیرمجموعه دارد پس تعداد پیشامدهایی که برای پرتاب یک سکه می‌توان تعریف کرد چهار پیشامد است.



آقا علی: آقا اجازه ، یعنی چهار مجموعه ی S و $\{\text{پشت}\}$ و $\{\text{رو}\}$ و $\emptyset$ همه پیشامدهای پرتاب یک سکه هستند؟

بله علی جان کاملاً درسته و در حالتی که تعداد اعضای پیشامد ها برابر باشد به آن ها پیشامد هم شانس می‌گوییم و در این مثال دو پیشامد هم شانس وجود دارد چون دو زیرمجموعه ی یک عضوی دارد.

ایستگاه سوالات



٣٥



۳. اگر تاسی را ۲ بار بیندازیم:

(الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید.

(ب) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده دقیقا ۵ باشد.

(پ) چقدر احتمال دارد دو عدد رو شده مثل هم باشند.

(ت) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده حداقل ۱۰ شود.

پاسخ:

(الف) خواندیم که تعداد حالت‌های پرتاب تاس از رابطه 6^n بدست می‌آید در نتیجه:

$$(تعداد پرتاب) \ n = 2 \rightarrow n(S) = 6^2 = 36$$

(ب) مجموعه از حالت‌های تشکیل می‌دهیم که مجموع دو عدد روی تاس‌ها برابر ۵ باشد:

$$n(A) = 4 \rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \text{در نتیجه: } A = \{(1,4) \text{ و } (4,1) \text{ و } (2,3) \text{ و } (3,2)\}$$

$$(پ) \ B = \{(1,1) \text{ و } (2,2) \text{ و } (3,3) \text{ و } (4,4) \text{ و } (5,5) \text{ و } (6,6)\} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$n(B) = 6 \rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ت) با توجه به اعداد روی تاس؛ **حداقل** ۱۰ یعنی مجموع دو عدد ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ باشد. پس:

$$n(A) = 6 \rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{در نتیجه: } B = \{(4,6) \text{ و } (6,4) \text{ و } (5,5) \text{ و } (5,6) \text{ و } (6,5) \text{ و } (6,6)\}$$

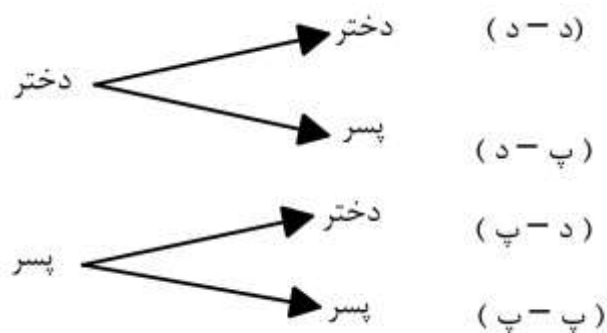
۴. اگر خانواده‌ای دارای ۲ فرزند باشد، ابتدا مجموعه S را تعیین کنید سپس چقدر احتمال دارد این خانواده دقیقا

دارای دو پسر باشد؟

پاسخ: اینگونه مسائل مشابه مسائل پرتاب سکه است، با این تفاوت که در پرتاب سکه حالت‌های ممکن بر اساس رو

و پشت تعیین میشود، در حالی که اینجا حالت‌های ممکن بر اساس پسر (با مخفف پ) و دختر (با مخفف د) تعیین

میشود. در نتیجه برای n فرزند؛ 2^n حالت ممکن وجود دارد.



نمودار درختی حالات دو فرزند



$$\text{در نتیجه: } S = \{(د,د) \text{ و } (د,پ) \text{ و } (پ,د) \text{ و } (پ,پ)\} \quad \text{پس: } n(S) = 4$$

$$n(A) = 1 \rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{در نتیجه: } A = \{(پ,پ)\} \quad \text{خانواده دقیقا دو پسر داشته باشد:}$$



۵. یک سکه و یک تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم:

(الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید.....

(ب) احتمال اینکه سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

(پ) احتمال اینکه سکه پشت یا تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

پاسخ: در مثال ۱ حالت‌های ممکن برای پرتاب یک سکه و یک تاس بیان شده است.

$$n(S) = 2 \times 6 = 12 \text{ (الف)}$$

$$n(A) = 3 \rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ پس: } A = \{(پ, ۲) \text{ و } (پ, ۴) \text{ و } (پ, ۶)\}$$

$$B = \{(پ, ۱) \text{ و } (پ, ۲) \text{ و } (پ, ۳) \text{ و } (پ, ۴) \text{ و } (پ, ۵) \text{ و } (پ, ۶) \text{ و } (ر, ۲) \text{ و } (ر, ۴) \text{ و } (ر, ۶)\}$$

$$n(B) = 9 \rightarrow P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

دقت کنیم که در مثال قسمت پ با توجه به این که در صورت سوال بین دو عبارت کلمه ی " یا " قرار گرفته است باید اجتماع حالت‌هایی که سکه پشت آمده و حالت‌هایی که تاس زوج آمده است را به عنوان مجموعه ی مطلوب در نظر گرفت.

$$\text{سکه پشت بیاید: } \{(پ, ۱) \text{ و } (پ, ۲) \text{ و } (پ, ۳) \text{ و } (پ, ۴) \text{ و } (پ, ۵) \text{ و } (پ, ۶)\}$$

$$\text{تاس زوج بیاید: } \{(پ, ۲) \text{ و } (پ, ۴) \text{ و } (پ, ۶) \text{ و } (ر, ۲) \text{ و } (ر, ۴) \text{ و } (ر, ۶)\}$$

اجتماع دو مجموعه ی بالا مجموعه ی B را به وجود می‌آورد.

۶. خانواده‌ای دارای سه فرزند است چقدر احتمال دارد این خانواده:

(الف) حداقل ۲ پسر داشته باشد. (ب) دقیقاً ۲ دختر داشته باشد. (پ) حداکثر ۲ دختر داشته باشد.

پاسخ:

$$S = \{(پ, پ, پ) \text{ و } (پ, پ, د) \text{ و } (پ, د, پ) \text{ و } (پ, د, د) \text{ و } (د, پ, پ) \text{ و } (د, پ, د) \text{ و } (د, د, پ) \text{ و } (د, د, د)\}$$

(الف) حداقل ۲ پسر معادل است با: پسر ۲ یا ۳ پسر. پس حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آنها دو پسر (پ) و سه

$$A = \{(پ, پ, پ) \text{ و } (پ, پ, د) \text{ و } (پ, د, پ) \text{ و } (د, پ, پ)\} \rightarrow n(A) = 4 \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ پسر وجود دارد.}$$

(ب) دقیقاً ۲ دختر یعنی حالت‌های مد نظر هستند که در آنها فقط دو دختر (د) وجود دارد نه بیشتر و نه کمتر.

$$B = \{(پ, د, د) \text{ و } (د, پ, د) \text{ و } (د, د, پ)\} \rightarrow n(B) = 3 \rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

(پ) حداکثر ۲ دختر معادل است با: ۲ دختر یا ۱ دختر یا ۰ دختر. پس حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آنها ۲

دختر (د) یا ۱ دختر یا اصلاً دختری وجود ندارد را در نظر می‌گیریم پس:

$$C = \{(پ, پ, پ) \text{ و } (پ, پ, د) \text{ و } (پ, د, پ) \text{ و } (د, پ, پ) \text{ و } (د, پ, د) \text{ و } (د, د, پ)\}$$

$$n(C) = 7 \rightarrow P(C) = \frac{7}{8}$$

دانش آموزان عزیز برای تسلط و درک مطالب این درس تمرین صفحه ۱۷ را حل کنید.

فصل ۲ (اعداد های حقیقی)

فهرست

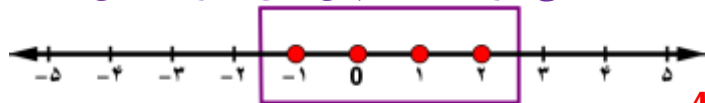
درس اول: عددهای گویا

درس دوم: عددهای حقیقی

درس سوم: قدر مطلق و محاسبه ی تقریبی

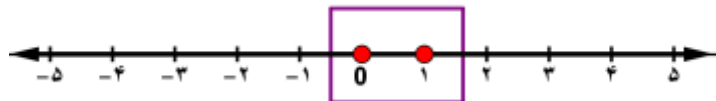
❖ درس اول عددهای گویا

یادآوری: هر کدام از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.



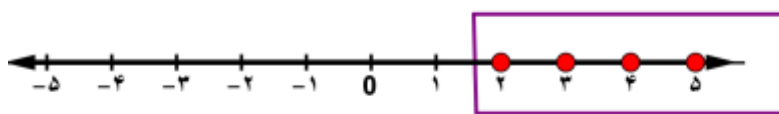
الف * A: اعداد صحیح بین ۲- و ۳؛

حل: $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ و } -2 < x < 3\}$



ب * B: اعداد حسابی کوچکتر از ۲؛

حل: $B = \{x | x \in \mathbb{W} \text{ و } x < 2\}$



پ * C: اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲؛

حل: $C = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq x\}$

تمرین ۲. الف * مجموعه اعداد گویای بین ۲- و ۳ چند عضو دارد؟

حل: بی شمار عضو دارد

ب * آیا می توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد؟

حل: خیر - چون مجموعه اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین نمی

توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد.

پ * آیا می توان این مجموعه را روی محور نمایش داد؟

حل: خیر

یادآوری

❖ مجموعه اعداد گویا

هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و در ضمن، مخرج آن صفر نباشد عددی گویا است.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

❖ **نکته:** مجموعه اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم.

❖ **نکته:** همه عددهای طبیعی، صحیح و رادیکالی با جذر دقیق، عضو مجموعه اعداد گویا هستند. یعنی $\circ$.

❖ **نکته:** چون مجموعه اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین

مجموعه اعداد گویا را فقط با نماد ریاضی نمایش می دهیم. یعنی $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

❖ **نکته:** بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد.

❖ روش های پیدا کردن کسر بین دو کسر

روش ۱ (هم مخرج کردن): در این روش ابتدا با کمک مخرج مشترک، کسرها را هم مخرج کرده، سپس عددهای بین دو صورت را با مخرج مشترک می نویسیم.

تمرین ۳. الف * سه کسر بین $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{8}$ بنویسید.

حل: $\frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{4}{24}$ و $\frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \Rightarrow \frac{4}{24} < \frac{5}{24} < \frac{6}{24} < \frac{7}{24} < \frac{15}{24}$

ب * دو کسر بین $-\frac{3}{8}$ و $-\frac{4}{9}$ بنویسید.

حل: $-\frac{4 \times 8}{9 \times 8} = -\frac{32}{72}$ و $-\frac{3 \times 9}{8 \times 9} = -\frac{27}{72} \Rightarrow -\frac{32}{72} < -\frac{31}{72} < -\frac{30}{72} < -\frac{27}{72}$

❖ **نکته:** گاهی وقت ها پس از هم مخرج کردن کسرها، بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد. در این حالت می توانیم برای به دست آوردن کسرهای خواسته شده، صورت و مخرج دو کسر را در عددی طبیعی که یک واحد بیشتر از تعداد کسرهای خواسته شده است ضرب کنیم. (در واقع، مخرج مشترک را عدد بزرگتری در نظر می گیریم)

تمرین ۴. چهار کسر بین $-\frac{6}{7}$ و $-\frac{7}{8}$ بنویسید.

حل: $-\frac{6 \times 8}{7 \times 8} = -\frac{48}{56}$ و $-\frac{7 \times 7}{8 \times 7} = -\frac{49}{56}$

چون بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و تعداد کسرهای خواسته شده چهار است بنابراین صورت و مخرج را در عدد پنج یا عددی بزرگتر از پنج ضرب می کنیم.

$-\frac{48 \times 5}{56 \times 5} = -\frac{240}{280}$ و $-\frac{49 \times 5}{56 \times 5} = -\frac{245}{280}$

$-\frac{245}{280} < -\frac{244}{280} < -\frac{243}{280} < -\frac{242}{280} < -\frac{241}{280} < -\frac{240}{280}$

روش ۲ (میانگین گرفتن): در این روش، دو کسر را جمع کرده و سپس حاصل جمع را بر ۲ تقسیم می کنیم. برای به دست آوردن تعداد بیشتری کسر، این روش را با کسرهای جدید ادامه می دهیم.

❖ **نکته:** میانگین دو عدد دلخواه، دقیقاً وسط آن دو عدد قرار دارد و فاصله آن از دو عدد به یک اندازه می باشد.

تمرین ۵. الف * بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$ دو کسر به روش میانگین پیدا کنید.

حل: $\frac{2}{3}$ ، $\boxed{\frac{11}{24}}$ ، $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{11}{24} \div 2 = \frac{11}{24} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{48} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{11}{12} \div 2 = \frac{11}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$

حال برای پیدا کردن کسر دیگر کافی است که کسر $\frac{11}{24}$ را با یکی از دو کسر $\frac{1}{4}$ یا $\frac{2}{3}$ در نظر بگیریم و به همین روش عمل کنیم:

$\frac{1}{4} + \frac{11}{24} = \frac{6+11}{24} = \frac{17}{24} \Rightarrow \frac{17}{24} \div 2 = \frac{17}{24} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{48}$
 $\frac{1}{4}$ ، $\boxed{\frac{17}{48}}$ ، $\boxed{\frac{11}{24}}$ ، $\frac{2}{3}$

ب * بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{8}$ کسری بنویسید که فاصله آن از دو کسر به یک اندازه باشد.

حل: در واقع باید میانگین این دو کسر را حساب کنیم:

$\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24+25}{40} = \frac{49}{40} \Rightarrow \frac{49}{40} \div 2 = \frac{49}{40} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{80} \Rightarrow \frac{3}{5}$ ، $\boxed{\frac{49}{80}}$ ، $\frac{5}{8}$

روش ۳ (جمع صورت ها با هم و مخرج ها با هم): اگر صورت دو کسر را با هم و مخرج ها را نیز با هم جمع کنیم کسر حاصل، بین دو کسر داده شده خواهد بود.

تمرین ۶. الف * سه کسر بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ بنویسید.

حل: $\frac{2}{3} < \frac{2+4}{3+5} = \frac{6}{8} < \frac{6+4}{8+5} = \frac{10}{13} < \frac{10+4}{13+5} = \frac{14}{18} < \frac{4}{5}$

ب * چهار کسر بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{9}$ بنویسید.

حل: $\frac{1}{2} < \frac{1+5}{2+9} = \frac{6}{11} < \frac{6+5}{11+9} = \frac{11}{20} < \frac{11+5}{20+9} = \frac{16}{29} < \frac{16+5}{29+9} = \frac{21}{38} < \frac{5}{9}$

❖ نمایش اعشاری اعداد گویا

تعریف: برای محاسبه ی کسر $\frac{5}{4}$ اگر با ماشین حساب عدد ۵ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل 1.25 می شود. و برای

محاسبه ی کسر $\frac{7}{3}$ اگر با ماشین حساب عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کنیم، حاصل $2.333333...$ می شود.

پس هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری است.

✓ مثال:

$\frac{3}{8} = 0.375$

$\frac{2}{3} = 0.666666...$

$\frac{7}{50} = 0.14$

$$\frac{5}{6} = 0.833333...$$

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$17 = 17.0$$

عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا به دو حالت کلی زیر تقسیم می شود:

(الف) اعداد اعشاری مختوم یا متناهی (با پایان) **(ب) اعداد اعشاری متناوب**

(الف) کسری دارای نمایش اعشاری مختوم است که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم بالاخره باقی مانده صفر می شود. و تعداد رقم های بعد از اعشار آنها متناهی بوده، و در یک رقمی، قطع شده و تمام می شود.

✓ **مثال:**

قسمت اعشاری کسر $\frac{1}{8}$ متناهی (فقط ۱ و ۲ و ۵) است و بعد از رقم ۵ به پایان می رسد.

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

توجه: عدد صحیحی مانند ۶ نیز مختوم است زیرا اگر به آن مخرج یک ($\frac{6}{1}$) بدهیم و صورت را

۶

بر مخرج تقسیم کنیم باقی مانده صفر می شود.

(ب) کسری دارای نمایش اعشاری متناوب است که با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن، باقی مانده هیچ گاه صفر نمی شود و قسمت اعشاری آنها انتها ندارد. در قسمت اعشاری این اعداد یک یا چند رقم به صورت متناوب (یعنی پشت سرهم) تکرار می شوند. و از نماد زیر برای نمایش رقم هایی که تکرار می شود استفاده می کنند.

✓ **مثال:**

$$\frac{5}{9} = 0.55555... = 0.\bar{5}$$

عدد ۵ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$$\frac{2}{11} = 0.181818... = 0.\bar{18}$$

عدد ۱۸ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$$\frac{7}{6} = 1.16666... = 1.\bar{16}$$

رقم ۱ ثابت و رقم ۶ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

علامت تکرار (-) روی رقمی قرار می گیرد، که بطور متناوب تکرار می شود.

تمرین: به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را به دست آورده و مختوم بودن یا متناوب بودن هر کدام را مشخص کنید.

$$\frac{13}{21} = 0.619047$$

متناوب

$$\frac{17}{5} = 3.4$$

مختوم

$$\frac{2}{21} = 0.095238095...$$

متناوب

$$\frac{1}{4000} = 0.00025$$

مختوم

$$-\frac{1}{33} = -0.030303...$$

متناوب

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

مختوم

$$0.7777777777777777$$

مختوم (دقت کنید قسمت اعشار عدد متناهی است. و تمام می شود.)

سوال چالشی: بدون استفاده از ماشین حساب و انجام تقسیم چطور می‌تونیم بفهمیم کسر مختوم است یا متناوب؟

❖ **نکته ۱:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند. *اگر مخرج کسر را به عامل‌های اول تجزیه کنیم کسری که مخرج آن فقط عوامل اول ۲ یا ۵ داشته باشد. مختوم یا متناهی است. مانند: $\frac{13}{20}, \frac{7}{5}, \frac{1}{4}, \dots$ توجه کسرهایی مانند $\frac{6}{1}$ که مخرج آنها یک است و هیچ عامل اولی ندارد. نیز مختوم می‌باشد. (می‌دانیم عدد یک نه اول است، نه مرکب)

✓ **مثال:**

مخرج کسر تنها دارای عامل اول ۲ است. **مختوم**
 $\frac{7}{4} = \frac{7}{2 \times 2} = 1/75 \rightarrow$
 مخرج کسر دارای عامل اول ۲ و ۵ است. **مختوم**
 $\frac{9}{50} = \frac{9}{5 \times 5 \times 2} = 0/18 \rightarrow$
 کسر قابل ساده شدن است اول ساده می‌کنیم. مخرج فقط عامل اول ۵ دارد. **مختوم**
 $\frac{99 \div 3}{75 \div 3} = \frac{33}{25} = \frac{33}{5 \times 5} = 1/32 \rightarrow$
 مخرج کسر هیچ عامل اول ندارد. **مختوم**
 $\frac{10}{1} \rightarrow$
 به عدد مخرج یک می‌دهیم. مخرج یک هیچ عامل اولی ندارد. **مختوم**
 $185 = \frac{185}{1} \rightarrow$

❖ **نکته ۲:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند. *اگر مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم. و عامل اولی غیر از ۲ یا ۵ مانند ۱, ۳, ۷, ۱۱, دیدیم. در این صورت کسر متناوب خواهد بود.

✓ **مثال:**

مخرج دارای عامل اول غیر از ۲ یا ۵ است. **متناوب**
 $\frac{3}{11} = 0/272727... \rightarrow$
 مخرج علاوه بر ۲ دارای عامل اول ۳ می‌باشد. **متناوب**
 $\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3} = 0/83333... \rightarrow$
 مخرج علاوه بر ۲ و ۵ دارای عامل اول ۷ است. **متناوب**
 $\frac{1}{70} = \frac{1}{2 \times 5 \times 7} = 0/01428... \rightarrow$

📌 **تمرین:** نوع عدد اعشاری حاصل از هریک از اعداد گویای زیر را بدون انجام تقسیم مشخص کنید.

$\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \times 5 \times 5} \rightarrow$ **مختوم**
 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \rightarrow$ **مختوم**
 $\frac{15}{21} = \frac{5}{7} \rightarrow$ **متناوب**
 $\frac{9}{14} = \frac{9}{2 \times 7} \rightarrow$ **متناوب**
 $\frac{7}{33} = \frac{7}{3 \times 11} \rightarrow$ **متناوب**
 $\frac{2}{5} \rightarrow$ **مختوم**
 $\frac{13}{12} = \frac{13}{2 \times 2 \times 3} \rightarrow$ **متناوب**
 $\frac{10}{15} = \frac{2}{3} \rightarrow$ **متناوب**

سوالات امتحانی حل شده

۱- نمایش اعشاری کسر $\frac{5}{6}$ ، مختوم است. (سمنان-خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ مخرج عامل غیر از ۲ یعنی ۳ دارد. $\frac{5}{2 \times 3}$

۲- نمایش اعشاری $\frac{3}{10}$ عدد به صورت $0.3333\dots$ است. (خراسان شمالی- خرداد ۹۵) ص غ

حل: غ $\frac{3}{10} = 0.3$

۳- عدد $0.\overline{3}$ از عدد $0.\overline{32}$ کوچکتر است. (تهران نوبت صبح- خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ رقم دوم اعشار هر دو عدد را مقایسه کنید. $0.322222\dots > 0.333333\dots$

۴- نمایش اعشاری کسر $\frac{2}{5}$ است. (مختوم- متناوب) (اصفهان- خرداد ۹۶)

حل: مختوم زیرا مخرج فقط عامل ۵ دارد.

۵- عدد $3/\overline{13}$ از $3/13$ است. (بزرگتر- کوچکتر- مساوی) (سمنان- خرداد ۹۵)

حل: بزرگتر زیرا $3/13 > 3/131313\dots$ رقم سوم اعشار عدد $(3/131313\dots)$ یک ولی رقم سوم اعشار عدد $(3/13)$ صفر است.

۶- کدام یک از اعداد زیر نمایش اعشاری مختوم دارد. (تهران- خرداد ۹۶)

$\frac{3}{17}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{55}$ $\frac{7}{30}$

حل: زیرا مخرج فقط عامل ۲ دارد. $\frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$

۷- کدام کسر نمایش اعشاری متناوب دارد. (قزوین- خرداد ۹۶)

$\frac{7}{25}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{8}$

حل: مخرج عامل اول ۳ دارد. $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \times 3}$

۸- نمایش اعشاری $\frac{5}{16}$ برابر است با: (آذربایجان شرقی- خرداد ۹۵)

0.3125 0.3135 0.31 0.312

حل: 0.3125 صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

۹- کدام یک از اعداد زیر عدد اعشاری مختوم نمی باشد. (چهارمحال بختیاری- خرداد ۹۵)

$\frac{21}{35}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{21}{39}$

حل: زیرا مخرج عامل اول ۱۳ دارد. $\frac{21 \div 3}{39 \div 3} = \frac{7}{13}$

$$10- \text{حاصل کسر مرکب} \frac{2-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{10}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} \text{ مساوی عدد } \frac{-1}{3} \text{ است. (آذربایجان غربی-خرداد ۹۵) ص غ}$$

حل: غ یادآوری ترتیب عملیات

۱-اول پرانتزها را حساب کن ۲-حاصل توان ۳-در هنگام محاسبه چه داخل پرانتز چه بیرون پرانتز همواره از سمت چپ به راست ضرب و تقسیم را انجام می دهیم ۴-پس از ضرب و تقسیم، جمع و تفریق را انجام می دهیم.

$$\text{صورت: } \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8-2+3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{مخرج: } \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{صورت بر مخرج} \quad \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}} = -3$$

$$11- \text{حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (کرمانشاه-خرداد ۹۵)}$$

$$\text{حل: } \frac{-1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{-5}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{-1 \times 7}{2 \times 7} - \frac{5}{14} = \frac{-7-5}{14} = \frac{-12}{14} = -\frac{6}{7}$$

❖ **درس دوم عددهای حقیقی**

آشنایی با عددهای گنگ

عددهایی مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \dots, 0.1001000100001000001\dots$ که تعداد رقم های اعشاری آنها بی شمار است و دارای دوره تناوب نیست. **گنگ یا اصم** می گوئیم.

*مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را **با نماد Q' یا Q^c** نمایش می دهیم.*

✓ **مثال:**

$\sqrt{2} = 1/414212562\dots$ → **گنگ** هیچ نظمی در قسمت اعشاری وجود ندارد. بی پایان و بدون تکرار است.

$0/343443444\dots$ → **گنگ** بی پایان و بدون تکرار است.

$0/1211211121112\dots$ → **گنگ** بی پایان و بدون تکرار است.

- *توجه در اعداد گویای متناوب یک یا چند عدد بصورت نامتناهی و به طور منظم تکرار می شود ولی در اعداد بالا اعداد به صورت نامنظم ادامه پیدا می کنند و ما نمی توانیم دوره ی تناوب مشخصی برای آنها قائل باشیم.*

✧ **نکته ۱:** یکی از اعداد معروف گنگ، عدد π است. که در زیر ، تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است. اما در محاسبات حداکثر تا دو رقم اعشار استفاده می شود.

$$\pi = 3/141592653589793238462643383279$$

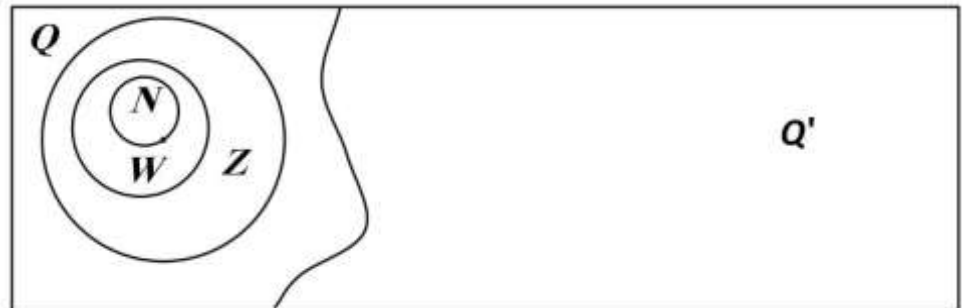
✧ **نکته ۲:** جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است.

مانند: $\sqrt{46}, \sqrt{20}, \sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{7/5}, \sqrt{0/9}, \sqrt{10}$

- توجه: عددهایی که جذر کامل دارند مثل ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, این عددها وقتی زیر رادیکال هستند گویا هستند و گنگ نمی باشند. زیرا

$$\dots \sqrt{0/49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 0/7, \sqrt{25} = 5, \sqrt{16} = 4, \sqrt{9} = 3$$

☆ نکته ۳: در نمودار ون مجموعه های N, W, Z, Q, Q' به صورت زیر می باشند.



☆ نکته ۴: مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ دو مجموعه ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک ندارند، به بیان دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. $Q \cap Q' = \emptyset$

- * توجه طبق نمودار ون $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

✍ تمرین: کدام عبارت درست و کدام نادرست است.

$-3 \in Q'$ غ	ص $2/3 \circ 3 \circ \circ 3 \circ \circ \circ 3 \dots \in Q'$	ص $\sqrt{5} \in Q'$	ص $\frac{3}{7} \in Q$
ص $\sqrt{3/7} \in Q'$	غ $\sqrt{7} \in Q$	غ $\frac{\sqrt{9}}{4} \in Q'$	ص $Q \cap Q' = \emptyset$
ص $Z \cap Q' = \emptyset$	ص $Z \subseteq Q$	غ $N \subseteq Q'$	ص $W \not\subseteq Q'$

سوالات امتحانی حل شده

۱- $0/3 \in Q$ (گیلان-خرداد ۹۵) ص غ

حل: ص

۲- عدد $0/17$ گنگ است. (البرز-خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ گویاست.

۳- عددی وجود دارد که هم گویا و هم گنگ باشد. ص غ

حل: غ مجموعه گویا و گنگ دو مجموعه جدا از هم هستند.

۴- عدد $\sqrt{9}$ عدد گنگ است. (زنجان-خرداد ۹۵) ص غ

حل: غ گویاست. $\sqrt{9} = 3$

۵- عدد π عددی اصم است. (لرستان-خرداد ۹۶) ص غ

حل: ص

۶- عدد $2 \dots 2 \circ \circ 2 \circ \circ 2 \circ / 2$ یک عدد گویا است. (قم-خرداد ۹۵) ص غ

حل: غ گنگ است.

۷- حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

۸- حاصلضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

۹- حاصل تقسیم عددی گویای غیر صفر و عدد گنگ برهم، عددی گنگ است. ص غ

حل: ص مثال ۲ عددی گویا و $\sqrt{3}$ عددی گنگ است. حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ هر دو گنگ هستند.

۱۰- کدام عدد به مجموعه عددهای گنگ تعلق دارد. (بوشهر-خرداد ۹۵)

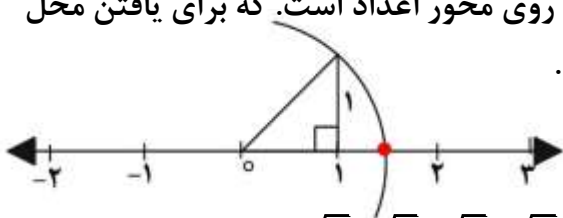
$$\sqrt{11} \quad \sqrt{3} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل: $\sqrt{3}$

❖ نمایش هندسی اعداد گنگ

هر عدد گنگ متناظر با یک نقطه روی محور اعداد می باشد.

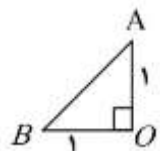
به عنوان مثال نقطه ی نمایش عدد $\sqrt{2}$ یک نقطه بین دو عدد ۱ و ۲ روی محور اعداد است. که برای یافتن محل دقیق در روی محور مطابق شکل از روش هندسی استفاده می کنیم.



* برای به دست آوردن محل دقیق اعداد گنگ رادیکالی مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ از همین روش که در پایه ی هشتم آموختیم استفاده می کنیم.*

یادآوری پایه ی هشتم

برای رسم پاره خط هایی به طول $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ و از رابطه ی فیثاغورس و مثلث قائم الزاویه کمک



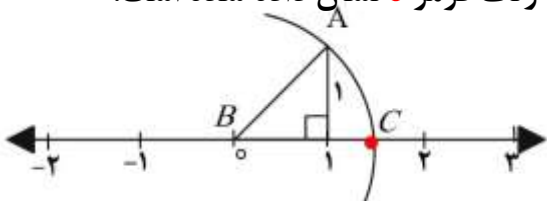
می گیریم. مثلاً برای رسم پاره خطی به طول $\sqrt{2}$ از مثلثی به شکل زیر استفاده می کنیم.

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow AB = \sqrt{2}$$

همان طور که در شکل میبینید. طبق رابطه ی فیثاغورس، مثلث قائم الزاویه با ضلع های قائمه ۱ و تری به اندازه ی

$\sqrt{2}$ به ما می دهد. اگر همین مثلث را روی محور رسم کنیم و کمانی به مرکز نقطه ی O و شعاع AB بزنیم.

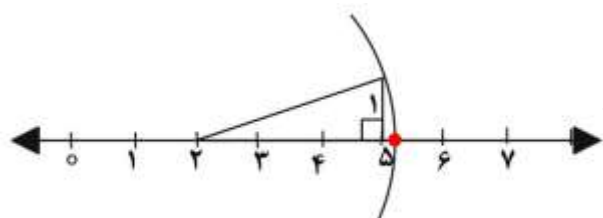
محل برخورد با محور یعنی نقطه ی C ، نقطه ی نمایش $\sqrt{2}$ است. که با رنگ قرمز نشان داده شده است.



- *توجه برای اینکه راحت تر بتوانیم مثلث قائم الزاویه مورد نظر را پیدا کنیم. عدد زیر رادیکال را به صورت مجموع دو یا چند مربع کامل می نویسیم. این اعداد مربع کامل، مجذور طول اضلاع قائمه ی مثلث هستند.*

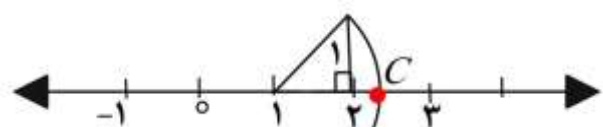
✓ مثال:

$-1-\sqrt{5}$ *نقطه ی شروع -۱* *چون $\sqrt{5}$ منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم.	$-\sqrt{17}$ $-\sqrt{17} = -\sqrt{16+1}$ 4 1 *نقطه شروع مبدا مختصات* *چون منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم*
$\sqrt{6}$ $\sqrt{6} = \sqrt{5+1} = \sqrt{4+1+1}$ 2 1 ابتدا $\sqrt{5}$ را رسم می کنیم سپس مثل قسمت های قبلی برای بدست آوردن $\sqrt{6}$ مثلث قائم الزاویه به طول ضلع قائمه ی ۱ روی وتر مثلث اول می سازیم. و کمان می زنیم.	$\sqrt{5}$ $\sqrt{5} = \sqrt{4+1}$ 2 1 زیرا: $2^2 + 1^2 = 5$ برای اینکه طول اضلاع را بفهمیم از ۴ و ۱ جذر می گیریم. پس برای رسم $\sqrt{5}$ داریم: مثلی به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ رسم می کنیم. *نقطه ی شروع مبدا مختصات* *چون $\sqrt{5}$ مثبت است پس به سمت راست حرکت می کنیم. *۲ واحد به سمت راست* *یک واحد به سمت بالا*



۱- نقطه ی نمایش عدد گنگ $2 + \sqrt{10}$ را روی محور نشان دهید.

حل:



۲- در شکل زیر نقطه ی C چه عددی را نشان می دهد.

$$\sqrt{2} = \text{طول وتر} \rightarrow 1^2 + 1^2 = 2$$

حل: اول طول وتر را پیدا می کنیم.

* نقطه ی شروع +۱ است.

* چون از نقطه ی شروع به سمت راست حرکت کرده پس $\sqrt{2}$ مثبت است.

$$C = +1 + \sqrt{2}$$

❖ چالش اعداد گنگ و گویا روی محور

* نکته: مربع های کامل ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱, ۱۰۰, ۱۲۱,

بدون نمایش هندسی، چگونه تشخیص دهیم اعداد گنگ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

✓ **مثال ۱:** $\sqrt{15}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۱۵ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۱۵ بین دو مربع کامل ۹ و ۱۶ قرار دارد. ($9 < 15 < 16$) پس $\sqrt{15}$ بین دو عدد $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$9 < 15 < 16 \rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} \rightarrow 3 = \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 \rightarrow 3 < \sqrt{15} < 4$$

پس بین دو عدد صحیح ۳ و ۴ قرار می گیرد.

✓ **مثال ۲:** $2 + \sqrt{7}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۷ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۷ بین دو مربع کامل ۴ و ۹ قرار دارد. ($4 < 7 < 9$) پس $\sqrt{7}$ بین دو عدد $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$4 < 7 < 9 \rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

اینجا باید $\sqrt{7}$ را طبق سوال با عدد ۲ جمع کنیم. ($2 + \sqrt{7}$) پس دو طرف آن یعنی ۲ و ۳ را هم باید با ۲ جمع

کنیم. ($2 + 2 < 2 + \sqrt{7} < 2 + 3$)

$$2 + 2 < 2 + \sqrt{7} < 2 + 3 \rightarrow 4 < 2 + \sqrt{7} < 5$$

پس بین دو عدد ۴ و ۵ قرار می گیرد.

❖ نکته: بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ مثال ۳: بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

* اول ۵ و ۶ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$$5 \times 5 = 25, 6 \times 6 = 36$$

$$\sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{25} < \dots, \dots, ? \dots, \dots < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{27} < \sqrt{28} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{26/1} < \sqrt{27/5} < \sqrt{27/55} < \sqrt{30/1} < \sqrt{36}$$

توجه هنوز هم می توانیم بنویسیم. مانند: * این سوال بی شمار جواب دارد یعنی می توانیم هنوز عدد بنویسیم که گنگ باشند. دانش آموز عزیز ۳ تا عدد گنگ دیگر رو برای تمرین اضافه کن.

✓ مثال ۲: بین دو عدد ۱ و ۲ هفت عدد گنگ بنویسید.

حل:

* اول ۱ و ۲ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4$$

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{1/5} < \sqrt{2} < \sqrt{2/1} < \sqrt{3} < \sqrt{3/4} < \sqrt{3/7} < \sqrt{3/9} < \sqrt{4}$$

❖ نکته: بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ مثال ۳: بین دو عدد $\sqrt{7}$ و $\sqrt{10}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

* دو عدد زیر رادیکال هستند و ما براحتی می توانیم اعداد گنگ را پیدا کنیم.

$$\sqrt{7} < \sqrt{7/5} < \sqrt{8} < \sqrt{8/3} < \sqrt{9/4} < \sqrt{9/7} < \sqrt{10}$$

😊 توجه اشتباه رایج شاگردان، $\sqrt{9}$ را هم به عنوان عدد گنگ می نویسند ولی می دانیم $\sqrt{9} = 3$ گویاست.

❖ نکته: بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۴:** بین ۲ و $\sqrt{5}$ چهار عدد گویا و چهار عدد گنگ مشخص کنید.

حل:

برای پیدا کردن عدد گویا اول مقدار تقریبی $\sqrt{5}$ حدود دو رقم اعشار می نویسیم:

$$\sqrt{5} \approx 2/24$$

$$2 < 2/04 < 2/09 < 2/12 < 2/22 < \sqrt{5} \approx 2/24$$

برای عدد گنگ اول باید عدد ۲ را زیر رادیکال ببریم و برای اینکار عدد را دو بار در خودش ضرب می کنیم.

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4/2} < \sqrt{4/23} < \sqrt{4/5} < \sqrt{4/8} < \sqrt{5}$$

✧ **جمع بندی:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

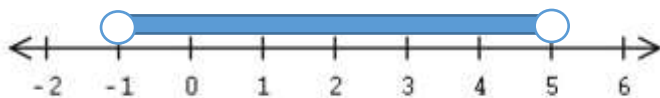
✓ **مثال ۵:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} | 3 \leq x \leq 5\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۳ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۳ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال، فقط اعداد گویا ($x \in \mathbb{Q}$) از ۳ تا ۵ را از ما می خواهد.

✓ **مثال ۶:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q}' | -1 < x < 5\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین -۱ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از -۱ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال، فقط اعداد گنگ ($x \in \mathbb{Q}'$) از -۱ تا ۵ را از ما می خواهد.

سوالات امتحانی حل شده

۱- عدد $\sqrt{3} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. (همدان-خرداد ۹۶)

۱, ۰ ۴, ۳ ۳, ۲ ۲, ۱

حل: $1 < \sqrt{3} < 2 \rightarrow 1+1 < \sqrt{3}+1 < 2+1 \rightarrow 2 < \sqrt{3}+1 < 3$

۲- $\sqrt{10} + 4$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد. (آذربایجان-خرداد ۹۶)

۰, ۱ ۱, ۲ ۲, ۳ ۰, ۱

حل:

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4 \rightarrow -4 + 3 < -4 + \sqrt{10} < -4 + 4 \rightarrow -1 < -4 + \sqrt{10} < 0$$

۳- بین دو عدد ۳ و ۴ دو عدد گنگ بنویسید. (هرمزگان-خرداد ۹۶)

حل: $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$

۴- بین $\sqrt{3}$ و ۴ یک عدد گنگ بنویسید. (البرز-خرداد ۹۶)

حل: $\sqrt{3} < \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

۵- عدد $\sqrt{90} - 10$ بین کدام اعداد صحیح قرار دارد.

حل:

چون ۹۰ بین دو مربع کامل ۸۱ و ۱۰۰ قرار دارد. ($81 < 90 < 100$) پس $\sqrt{90}$ بین دو عدد ۹ و ۱۰
($\sqrt{81} = 9, \sqrt{100} = 10$) قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$81 < 90 < 100 \rightarrow \sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100} \rightarrow 9 < \sqrt{90} < 10$$

اینجا باید طبق سوال $\sqrt{90}$ ، منهای ۱۰ شود. ($\sqrt{90} - 10$) پس دو طرف آن یعنی ۹ و ۱۰ را هم باید منهای ۱۰ کنیم. ($9 - 10 < \sqrt{90} - 10 < 10 - 10$) به قسمت زیر دقت کنید.

$$9 - 10 < \sqrt{90} - 10 < 10 - 10 \rightarrow -1 < \sqrt{90} - 10 < 0$$

پس بین -۱ و ۰ قرار دارد

❖ اعداد حقیقی

عددها به دو دسته جدا از هم، عددهای گویا و عددهای گنگ تقسیم می شوند. **اجتماع** مجموعه ی عددهای گویا و عددهای گنگ را **مجموعه عددهای حقیقی** می نامیم و آن را با نماد $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم.

❖ نکته ۱: $\mathbb{R} = \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q}$ تساوی بین سه مجموعه اعداد گویا و گنگ و حقیقی برقرار است.

❖ نکته ۲: نمودار ون:



$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$$

و

❖ نکته ۳: $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

✓ مثال:

$$-(1 + \sqrt{3}) \in \mathbb{R}$$

$$0.5555555555555555... \in \mathbb{R}$$

$$3/24 \in \mathbb{R}$$

$$5 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{35} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{6}{7} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

تمرین: داخل علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$$\begin{array}{ccccc} -3 \dots \mathbb{Z} & 0/47 \dots \mathbb{Q} & \sqrt{17} \dots \mathbb{R} & \frac{9}{0} \dots \mathbb{R} & -\sqrt{9} \dots \mathbb{R} \\ \frac{-6}{3} \dots \mathbb{N} & \sqrt{0/4} \dots \mathbb{Q} & \sqrt{0/81} \dots \mathbb{Q} & \sqrt{5/7} \dots \mathbb{Q}' & \frac{0}{5} \dots \mathbb{R} \end{array}$$

حل:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{-3 \dots \in \mathbb{Z}} & \underline{0/47 \dots \in \mathbb{Q}} & \underline{\sqrt{17} \dots \in \mathbb{R}} & \underline{\frac{9}{0} \dots \notin \mathbb{R}} & \underline{-\sqrt{9} \dots \in \mathbb{R}} \\ \underline{\frac{-6}{3} \dots \notin \mathbb{N}} & \underline{\frac{9}{10} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \sqrt{0/81} \dots \in \mathbb{Q}} & \underline{\sqrt{5/7} \dots \in \mathbb{Q}'} & \underline{0 = \frac{0}{5} \dots \in \mathbb{R}} & \underline{\sqrt{0/4} \dots \notin \mathbb{Q}} \end{array}$$

* توجه مجموعه ی اعداد گویا و مجموعه ی اعداد گنگ زیر مجموعه ی اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

تمرین: با توجه به مفاهیم قبلی و یا استفاده از نمودار ون جاهای خالی را پر کنید.

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \dots & \mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \dots & \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q} = \dots & \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \dots \\ \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \dots & \mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \dots & \mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z} = \dots & \mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \dots \end{array}$$

حل:

$$\begin{array}{cccc} \underline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}} & \underline{\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Q}} & \underline{\mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}} & \underline{\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}} \\ \underline{\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}} & \underline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}} & \underline{\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z} = \emptyset} & \underline{\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \emptyset} \end{array}$$

سوالات امتحانی حل شده

۱- عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۲- هر عدد گویا حقیقی است. (خوزستان- خرداد ۹۶) ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

$$3 - \sqrt{1} \in \mathbb{R} \quad \text{ص غ}$$

حل: ص

۴- از اجتماع دو مجموعه ی $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ مجموعه ی بوجود می آید. (تهران- خرداد ۹۶)

حل: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$

۵- اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و عددهای مجموعه عددهای حقیقی می نامیم. (صحیح- اصم)

حل: اصم

۶- کدام گزینه کامل شده ی $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \dots\dots$ است. (آذربایجان-خرداد ۹۶)

$$W \quad \underline{\mathbb{Q}'} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{N}$$

۷- کدام گزینه نادرست است. (تهران-خرداد ۹۶)

$$(\phi \cap \mathbb{Q}') \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \quad \underline{\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}} \quad \pi \in \mathbb{R} \quad 1/16 \in \mathbb{Q}$$

۸- کدام گزینه نادرست است. (کردستان-خرداد ۹۶)

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \phi \quad \underline{\mathbb{Q} - \mathbb{Z} = \mathbb{N}} \quad \mathbb{Z} \cap W = W \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

۹- کدام گزینه درست است. (کرمان-خرداد ۹۵)

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \quad \underline{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}}$$

۱۰- با توجه به مجموعه اعداد کدام گزینه صحیح نیست. (کرمانشاه-خرداد ۹۶)

$$\mathbb{Q} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \quad \underline{\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}} \quad \mathbb{N} - \mathbb{Z} = \phi \quad W - \mathbb{N} = \{\circ\}$$

✓ **مثال:** هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهای مشخص کنید.

$$A = \{\delta n + 3 | n \in \mathbb{N}\}, B = \{x^2 - 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\}, C = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\}$$

$$A = \{\delta n + 3 | n \in \mathbb{N}\} = \{8, 13, \dots\}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow 5 \times 1 + 3 = 8, 5 \times 2 + 3 = 13, \dots$$

$$B = \{x^2 - 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\} = \{3, 0, -1\}$$

$$x = -2, -1, 0 \rightarrow (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3, (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0, (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\} = ?$$

$$x = -1, 1, 1/5, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{4}, \dots$$

حل:

* توجه: در قسمت های قبلی یاد گرفتیم بین هر دو عدد حقیقی (گویا یا گنگ) **بی شمار** عدد حقیقی بصورت گویا یا گنگ وجود دارد. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی را **نمی توان** با اعضا نمایش داد. پس برای نمایش مجموعه اعداد حقیقی از محور استفاده می کنیم. *

❖ **محور اعداد حقیقی**



اعداد حقیقی را می توان روی یک محور نشان داد که به این محور، محور اعداد حقیقی می گوییم.

* هر نقطه روی این محور نشان دهنده ی یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ است.

به عبارت دیگر یک تناظر یک به یک بین اعداد حقیقی و نقاط روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

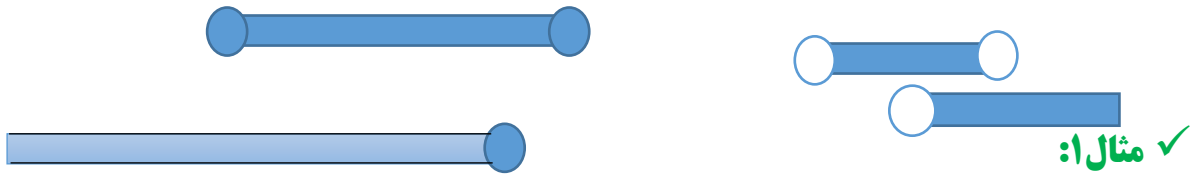
به صورت زیر:

* هر عدد حقیقی **فقط یک نقطه** را روی محور نشان می دهد و **هر نقطه** روی محور اعداد حقیقی، نمایش **یک عدد**

حقیقی است.

❖ نمایش هندسی مجموعه ها روی محور اعداد حقیقی

می خواهیم مجموعه های زیر را روی محور اعداد نشان دهیم برای این کار از خط ها و دایره های توپر و توخالی به شکل زیر استفاده می کنیم.



$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$$

انتهای خط
مسواوی دارد دایره توپر
مسواوی ندارد دایره توخالی
ابتدای خط

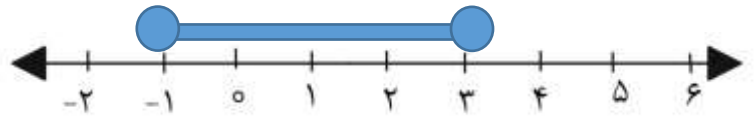
• **توجه:** در علامت های $\leq, \geq$ (بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی) علامت **مسواوی** به معنای آن است که خود عدد هم **جزو مجموعه** است و ما برای نشان داد نقاط ابتدایی یا انتهایی روی محور آن را با **دایره ی توپر** مشخص می کنیم.

علامت $<, >$ به معنای این است که نقاط ابتدا یا انتهایی جزو مجموعه **نیستند** و روی محور آن را با **دایره ی توخالی** نشان می دهیم.

✓ **مثال:** مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

انتهای خط توپر
توپر
ابتدای خط توپر



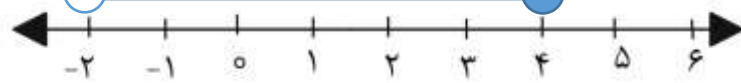
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$$

انتهای توخالی
توخالی
ابتدای توخالی



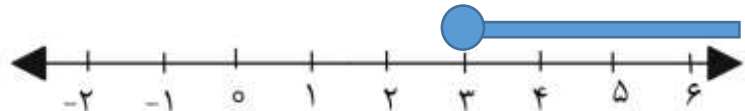
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$$

انتهای توپر
توپر
ابتدای توخالی

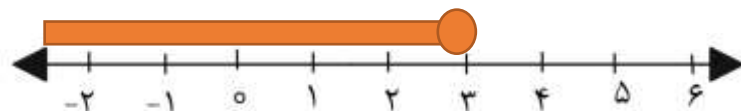


$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

ابتدای توپر



😊 ***اشتباه رایج دانش آموزان:** عدد ۳ را انتهای می گیرند و نمودار را به شکل زیر رسم می کنند. این غلط است.



* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید (**های بزرگتر از ۳**)

وقتی می خوانیم **بزرگتر** یعنی به **سمت راست ۳** باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت **راست** حرکت کنیم عدد **بزرگتر** و هر چقدر به سمت **چپ** حرکت کنیم عدد **کوچکتر** می شود.

$$E = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$$

انتها و توخالی



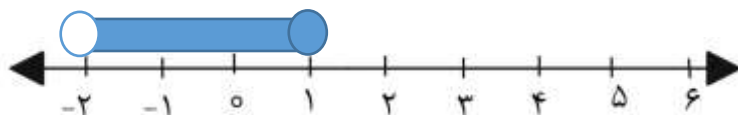
😊 * اشتباه رایج دانش آموزان: عدد -1 را ابتدا می گیرند و به شکل زیر رسم می کنند که غلط می باشد.



* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید (**X های کوچکتر از -1**)

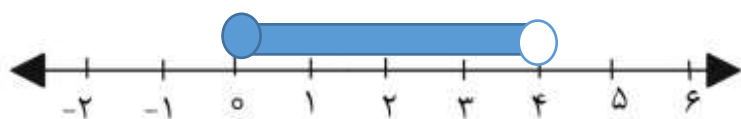
وقتی می خوانیم **کوچکتر** یعنی به **سمت چپ ۱-** باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت **چپ** حرکت کنیم عدد **کوچکتر** و هر چقدر به سمت **راست** حرکت کنیم عدد **بزرگتر** می شود.

$$F = \{x \in \mathbb{R} | \geq x > -2\}$$



به جهت علامت ها دقت کنید.

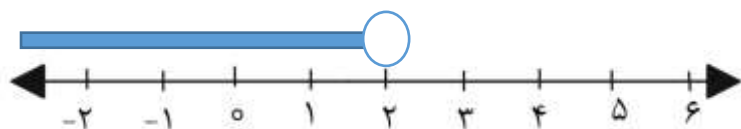
✓ مثال: با توجه به محور مجموعه ی متناظر با آن را بنویسید.



حل: ابتدا صفر و توپر، انتها ۴ و توخالی $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 4\}$

😊 * دقت کنید $x \in \mathbb{R}$ است. اشتباه رایج شاگردان $x \in \mathbb{Q}$ یا $x \in \mathbb{Z}$ می نویسند.

✓ مثال ۳:



حل: انتها ۲ و توخالی، حرکت به سمت چپ پس x های کمتر از ۲ $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

😊 * اشتباه رایج شاگردان $x > 2$ می نویسند. دقت کنید حرکت به سمت چپ است.

سوالات امتحانی حل شده

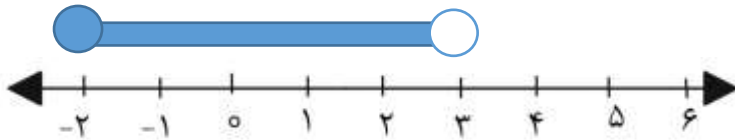
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$$

۱- الف) مجموعه را روی محور نشان دهید. (مرکزی- خرداد ۹۶)

ب) در داخل علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$$\sqrt{8} \dots\dots\dots A$$

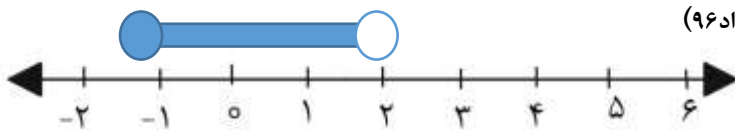
حل: الف



حل: ب) $\sqrt{8} \in A$ زیرا $\sqrt{8} \cong 2.82$ عددی بین ۲ و ۳ است. یا می توانیم از روش قبلی بدون استفاده از

ماشین حساب استفاده کنیم. $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9} \rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$

۲- شکل مقابل معرف کدام مجموعه است. (اصفهان- خرداد ۹۶)



$$\{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\{0, 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$

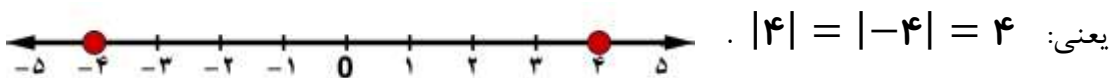
$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$$

❖ درس سوم قدر مطلق و محاسبه ی تقریبی

فاصله نقطه نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد، تا مبدأ (صفر) را قدر مطلق آن عدد می نامند.

قدر مطلق عدد a را با $|a|$ نشان می دهیم.

✓ **مثال:** فاصله نقاط نظیر دو عدد ۴ و -۴ تا مبدأ، برابر ۴ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد ۴ و (-۴) برابر ۴ است؛



$$|4| = |-4| = 4 \text{ یعنی:}$$

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عدد صفر، مساوی صفر می باشد. یعنی

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عددهای مثبت، مساوی خود عدد می باشد. یعنی

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عددهای منفی، مساوی قرینه آن عدد می باشد. یعنی

✍ **تمرین ۱.** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$* \text{ الف } |-4/0.2| = 4/0.2 \quad * \text{ ب } \left| \frac{-3}{8} \right| = \frac{3}{8} \quad * \text{ پ } |\sqrt{7}| = \sqrt{7} \quad * \text{ د } |0| = 0$$

❖ **نکته:** قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آنها است. یعنی برای هر دو عدد

$$|a \times b| = |a| \times |b| \quad \text{؛ حقیقی دلخواه مانند } a \text{ و } b$$

✓ **مثال:**

$$\left. \begin{aligned} |(-8) \times (+6)| &= |-48| = 48 \\ |-8| \times |6| &= 8 \times 6 = 48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |(-8) \times (+6)| = |-8| \times |6|$$

❖ **نکته:** قدر مطلق حاصل تقسیم دو عدد، مساوی با حاصل تقسیم قدر مطلق آنهاست. یعنی برای هر دو عدد

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{حقیقی دلخواه مانند } a \text{ و } b \text{ که } b \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{-24}{2} \right| &= |-12| = 12 \\ \frac{|-24|}{|2|} &= \frac{24}{2} = 12 \end{aligned} \right\} = \left| \frac{-24}{2} \right| = \frac{|-24|}{|2|} \quad \checkmark \text{ مثال:}$$

✍ تمرین ۲. آیا قدر مطلق حاصل جمع دو عدد، همواره مساوی با حاصل جمع قدر مطلق آنهاست؟

$$\left. \begin{aligned} |-9 + 2| &= |-7| = 7 \\ |-9| + |2| &= 9 + 2 = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-9 + 2| \neq |-9| + |2| \quad \text{حل: خیر - مثلاً}$$

❖ **نکته:** قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق آنها کوچکتر یا مساوی است. یعنی برای هر دو عدد

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{حقیقی دلخواه مانند } a \text{ و } b$$

$$\left. \begin{aligned} |-7 + 3| &= |-4| = 4 \\ |-7| + |3| &= 7 + 3 = 10 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{4 < 10} |-7 + 3| < |-7| + |3| \quad \checkmark \text{ مثال:}$$

$$\left. \begin{aligned} |8 + 9| &= |17| = 17 \\ |8| + |9| &= 8 + 9 = 17 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{17=17} |8 + 9| = |8| + |9| \quad \checkmark \text{ مثال:}$$

✍ تمرین ۳. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$|9 - 20 + 7| = \left| \overbrace{9 - 20}^{-11} + 7 \right| = |-4| = 4 \quad \text{(الف)}$$

$$|(-6) \times (+4)| = |-24| = 24 \quad \text{(ب)}$$

$$| -(-5 + 7) | = \left| -\overbrace{(-5 + 7)}^2 \right| = |-2| = 2 \quad \text{(پ)}$$

$$|-6 \times 3 + 7| = \left| \overbrace{-6 \times 3}^{-18} + 7 \right| = |-11| = 11 \quad \text{(ت)}$$

$$|-|3 - 15|| = \left| -\overbrace{|3 - 15|}^{-12} \right| = |-(+12)| = |-12| = 12 \quad \text{(ث)}$$

$$|-5^2| = |-25| = 25 \quad \text{(ج)}$$

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{9-2}{6} \right| = \left| \frac{7}{6} \right| = \frac{7}{6} \quad \text{(چ)}$$

$$|-\sqrt{7} + 3 + \sqrt{7}| = |-\cancel{\sqrt{7}} + 3 + \cancel{\sqrt{7}}| = |3| = 3 \quad \text{(ح)}$$

$$-|-8 - (-3)| = -| \overbrace{-8 + 3}^{+5} | = -|-5| = -5 \quad \text{(خ)}$$

❖ **نکته:** برای محاسبه قدرمطلق هایی که دارای عبارت های گنگ هستند، می توان ابتدا مقدار تقریبی عبارت درون قدرمطلق را به دست آورد تا منفی یا مثبت بودن عبارت داخل قدرمطلق مشخص شود. اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق منفی شد، عبارت درون قدرمطلق را قرینه کرده و از قدرمطلق خارج می کنیم و اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق مثبت شد، عبارت درون قدرمطلق را بدون تغییر از قدرمطلق خارج می کنیم.

✍ **تمرین ۴.** حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|\sqrt{6} - \sqrt{7}|$$

حل: چون مقدار $\sqrt{7}$ از $\sqrt{6}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{\sqrt{6} - \sqrt{7}}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{6} - \sqrt{7}) = -\sqrt{6} + \sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

$$|7 - \sqrt{15}| =$$

حل: مقدار $7 = \sqrt{49}$ از $\sqrt{15}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را بدون تغییر خارج کنیم.

$$|\underbrace{7 - \sqrt{15}}_{\text{مثبت}}| = 7 - \sqrt{15}$$

$$|6 - 5\sqrt{3}| =$$

حل: مقدار $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$ از $6 = \sqrt{36}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{6 - 5\sqrt{3}}_{\text{منفی}}| = -(6 - 5\sqrt{3}) = -6 + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6$$

$$|5 - \sqrt{2}| + |-1 + \sqrt{2}| = \underbrace{|5 - \sqrt{2}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 5 = \sqrt{25} > \sqrt{2}}} + \underbrace{|-1 + \sqrt{2}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2}}} = 5 - \cancel{\sqrt{2}} - 1 + \cancel{\sqrt{2}} = 4$$

$$|\sqrt{3} - 2| + |7 + \sqrt{3}| = \underbrace{|\sqrt{3} - 2|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{3} < 2 = \sqrt{4}}} + \underbrace{|7 + \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = -(\sqrt{3} - 2) + 7 + \sqrt{3} = -\cancel{\sqrt{3}} + 2 + 7 + \cancel{\sqrt{3}} = 9$$

$$|-\sqrt{6} - 11| - |\sqrt{6} + 2| = \underbrace{|-\sqrt{6} - 11|}_{\text{منفی}} - \underbrace{|\sqrt{6} + 2|}_{\text{مثبت}} = -(-\sqrt{6} - 11) - (\sqrt{6} + 2) = \cancel{\sqrt{6}} + 11 - \cancel{\sqrt{6}} - 2 = 9$$

$$|4 - \sqrt{5}| + |-\sqrt{5}| = \underbrace{|4 - \sqrt{5}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 4 = \sqrt{16} > \sqrt{5}}} + \underbrace{|-\sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = 4 - \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 4 - \cancel{\sqrt{5}} + \cancel{\sqrt{5}} = 4$$

$$4|\sqrt{3}-2| + |13+4\sqrt{3}| - |-7| = 4 \times \underbrace{|\sqrt{3}-2|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{3}<2=\sqrt{4}}} + \underbrace{|13+4\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|-7|}_{\substack{\text{منفی} \\ +7}} =$$

$$-4 \times (\sqrt{3}-2) + 13 + 4\sqrt{3} - (+7) = -4\sqrt{3} + 8 + 13 + 4\sqrt{3} - 7 = 14$$

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{-2} \right| = \frac{\underbrace{|1-\sqrt{5}|}_{\text{منفی}}}{|-2|} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

• توجه: اعدادی که بین صفر و یک هستند هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می شوند.

✓ مثال:

$$\begin{aligned} (0/2)^2 &= 0/04 \\ (0/2)^3 &= 0/008 \\ (0/2)^4 &= 0/0016 \\ (0/2)^5 &= 0/00032 \end{aligned} \Rightarrow (0/2)^2 > (0/2)^3 > (0/2)^4 > (0/2)^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{21} < \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \quad \text{و} \quad (0/92)^{17} > (0/92)^{19} \quad \checkmark \text{ مثال:}$$

تمرین ۵. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|(0/5)^{20} - (0/5)^{19}| =$$

*الف

حل: مقدار $(0/5)^{19}$ از $(0/5)^{20}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|(0/5)^{20} - (0/5)^{19}| = -((0/5)^{20} + (0/5)^{19}) = -(0/5)^{20} + (0/5)^{19}$$

$$|(2/3)^{12} - (2/3)^8| =$$

حل: مقدار $(2/3)^{12}$ از $(2/3)^8$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبه قدرمطلق، عبارت درون آن را بدون تغییر می نویسیم.

$$|(2/3)^{12} - (2/3)^8| = (2/3)^{12} - (2/3)^8$$

تمرین ۶. در جاهای خالی علامت <، = یا > قرار دهید.

$$|\sqrt{3}-2| \quad \square \quad |\sqrt{3}| + |-2|$$

$$|\sqrt{3}-2| \simeq \underbrace{|1/7-2|}_{-0/3} = 0/3 \quad \text{و} \quad |\sqrt{3}| + |-2| \simeq 1/7 + 2 = 3/7$$

$$|\sqrt{3}-2| \quad \square \quad |\sqrt{3}| + |-2| \quad \text{بنابراین}$$

$$\left| \frac{-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{|-\sqrt{5}|}{|2|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left| \frac{-\sqrt{5}}{2} \right| \boxed{=} \frac{|-\sqrt{5}|}{|2|} \quad \text{حل:}$$

$$|2^2 - 3^2| \boxed{} |2^2| - |3^2|$$

$$\left. \begin{aligned} |2^2 - 3^2| &= |4 - 9| = |-5| = 5 \\ |2^2| - |3^2| &= |4| - |9| = 4 - 9 = -5 \end{aligned} \right\} \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow |2^2 - 3^2| \boxed{>} |2^2| - |3^2|$$

تمرین ۷. اگر $a = 2$ ، $b = \frac{1}{3}$ و $c = -\frac{3}{4}$ باشد، حاصل عبارت $|4a - b - c|$ را به دست آورید.

حل: مقادیر داده شده را در عبارت $|4a - b - c|$ جایگذاری کرده و حاصل را به دست می آوریم:

$$|4a - b - c| = \left| 4 \times 2 - \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| = \left| 8 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{96 - 4 + 9}{12} \right| = \left| \frac{101}{12} \right| = \frac{101}{12}$$

تمرین ۸. اگر $a = -3$ ، $b = 1$ و $c = 7$ باشد، حاصل عبارت $\frac{|b| - c}{|a - b + c|}$ را به دست آورید.

$$\frac{|b| - c}{|a - b + c|} = \frac{|1| - 7}{|-3 - 1 + 7|} = \frac{1 - 7}{|3|} = \frac{-4}{3} \quad \text{حل:}$$

تمرین ۹. مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$\frac{|a| + 3|b|}{4|a - b|} = \quad : \quad a = -5 \text{ و } b = 9 \quad \text{الف}$$

$$\frac{|a| + 3|b|}{4|a - b|} = \frac{|-5| + 3 \times |9|}{4 \times |-5 - 9|} = \frac{5 + \overbrace{3 \times 9}^{27}}{4 \times |-14|} = \frac{5 + \overbrace{27}^{32}}{\underbrace{4 \times 14}_{56}} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7} \quad \text{حل:}$$

$$a = -5 \text{ و } b = 2 : |a + b| - 3|ab| =$$

$$|a + b| - 3|ab| = |-5 + 2| - 3 \times |-5 \times 2| = |-3| - 3 \times |-10| = 3 - \underbrace{3 \times 10}_{30} = 3 - 30 = -27$$

$$a = -8 \text{ و } b = \sqrt{3} : |2a - b| - b =$$

$$|2a - b| - b = |2 \times (-8) - \sqrt{3}| - \sqrt{3} = \underbrace{|-16 - \sqrt{3}|}_{-(-16 - \sqrt{3})} - \sqrt{3} = 16 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 16 \quad \text{حل:}$$

تمرین ۱۰. بزرگترین عدد صحیحی که اگر به جای مربع قرار دهیم، نامساوی زیر برقرار باشد چیست؟

$$|3 - 2 \times 4| > 4 + \square$$

حل: $|3 - \underbrace{2 \times 4}_8| > 4 + \square = |-5| > 4 + \square = 5 > 4 + \square =$

بنابراین جواب مورد نظر، عدد صحیح صفر می باشد. $\Rightarrow$

$5 \not> 4 + \boxed{1} = 5$
 $5 > 4 + \boxed{0} = 4 \checkmark$
 $5 > 4 + \boxed{-1} = 3$
 $5 > 4 + \boxed{-2} = 2$
 $\vdots$

تمرین ۱۱. عبارت کلامی مربوط به هر یک از رابطه های زیر را بنویسید.

الف * $a > 0$ پاسخ ← **عدد مثبت است.** پ * $a \geq 0$ پاسخ ← **عدد نامنفی است.**

ب * $a < 0$ پاسخ ← **عدد منفی است.** ت * $a \leq 0$ پاسخ ← **عدد نامثبت است.**

تمرین ۱۲. الف * فرض کنید $a < 0$ و $b < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|a|$ پاسخ منفی $= |\overbrace{a}^{\text{منفی}}| = -a$ ۲) $|b|$ پاسخ منفی $\Rightarrow |\overbrace{b}^{\text{منفی}}| = -b$

۳) $|-b|$ پاسخ منفی $= |-b| = -|\overbrace{b}^{\text{منفی}}| = -(-b) = b$

۴) $|ab|$ پاسخ مثبت $= |\overbrace{a \times b}^{\text{مثبت}}| = ab$ چون حاصل ضرب دو عدد منفی همواره مثبت است پس علامت عبارت درون قدر مطلق مثبت می شود.

۵) $|a + b|$ پاسخ منفی $= |\overbrace{a + b}^{\text{منفی}}| = -(a + b) = -a - b$ چون حاصل جمع دو عدد منفی همواره منفی است پس علامت عبارت درون قدر مطلق منفی می شود.

ب * فرض کنید $a > 0$ و $b < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|ab|$ پاسخ منفی $= |\overbrace{a \times b}^{\text{منفی}}| = -(ab) = -ab$ ۲) $|a - b|$ پاسخ مثبت $= |\overbrace{a - b}^{\text{مثبت}}| = a - b$

پ * فرض کنید $a > 0$ و $b < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $\left| \frac{ab}{c} \right| =$

حل: چون علامت a و b مثبت و c منفی است بنابراین علامت کل عبارت $\frac{ab}{c}$ منفی می شود. بنابراین هنگام خروج

از قدرمطلق باید قرینه شود. $\left| \frac{ab}{c} \right| = -\frac{ab}{c}$

$$۲) |abc^۲| =$$

حل: علامت $c^۲$ همواره مثبت است. از طرفی علامت a و b نیز مثبت است بنابراین علامت کل عبارت $abc^۲$ مثبت می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق تغییری نمی کند.

$$|abc^۲| = abc^۲$$

تمرین ۱۳: فرض کنید $۰ < x < ۱$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|x - ۵| + |x + ۷| =$$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۰ و ۱ است (مانند $۰/۲$) پس عبارت $x - ۵$ همواره منفی است. (مثلاً $x - ۵ = ۰/۲ - ۵ = -۴/۸$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.
از طرفی عبارت $x + 7$ همواره مثبت است. (مثلاً $x + 7 = ۰/۲ + 7 = 7/۲$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، تغییری نمی کند.

$$\overbrace{|x - ۵|}^{-(x-۵)} + \overbrace{|x + ۷|}^{x+۷} = -x + ۵ + x + ۷ = ۱۲$$

منفی مثبت

تمرین ۱۴: فرض کنید $۳ < x < ۴$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|x - ۴| + |x| =$$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۳ و ۴ است (مانند $۳/۵$) پس عبارت $x - ۴$ همواره منفی است. (مثلاً $x - ۴ = ۳/۵ - ۴ = -۰/۵$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

$$\overbrace{|x - ۴|}^{-(x-۴)} + \overbrace{|x|}^x = -x + ۴ + x = ۴$$

منفی مثبت

نکته: جذر توان دوم هر عدد با قدر مطلق آن عدد مساوی است. یعنی $\sqrt{a^۲} = |a|$.

✓ **مثال:**

$$\begin{aligned} \sqrt{(-۳)^۲} &= \sqrt{۹} = ۳ & \Rightarrow & \sqrt{(-۳)^۲} = |-۳| = ۳ \\ \sqrt{(+۵)^۲} &= \sqrt{۲۵} = ۵ & \Rightarrow & \sqrt{(+۵)^۲} = |+۵| = ۵ \\ \sqrt{(-۱۲)^۲} &= \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ & \Rightarrow & \sqrt{(-۱۲)^۲} = |-۱۲| = ۱۲ \end{aligned}$$

تمرین ۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(\sqrt{۷} - ۶)^۲} = \overbrace{|\sqrt{۷} - ۶|}^{منفی} = -(\sqrt{۷} - ۶) = -\sqrt{۷} + ۶$$

$\sqrt{۷} < ۶ = \sqrt{۳۶}$

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۵})^۲} = \overbrace{|۱ - \sqrt{۵}|}^{منفی} = -(۱ - \sqrt{۵}) = -۱ + \sqrt{۵}$$

$\sqrt{۱} < \sqrt{۵}$

$$\sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} = \left| \overbrace{2\sqrt{6} - 5}^{\text{منفی}} \right| = -(2\sqrt{6} - 5) = -2\sqrt{6} + 5$$

$2\sqrt{6} = \sqrt{24} < 5 = \sqrt{25}$

$$5\sqrt{(\sqrt{11} - 4)^2} = 5 \times \left| \overbrace{\sqrt{11} - 4}^{\text{منفی}} \right| = -5(\sqrt{11} - 4) = -5\sqrt{11} + 20$$

$\sqrt{11} < 4 = \sqrt{16}$

$$\sqrt{(5 + \sqrt{17})^2} - \sqrt{17} = \left| \overbrace{5 + \sqrt{17}}^{\text{مثبت}} \right| - \sqrt{17} = 5 + \cancel{\sqrt{17}} - \cancel{\sqrt{17}} = 5$$

$$\sqrt{(12 - \sqrt{31})^2} + |5 - \sqrt{31}| = \left| \overbrace{12 - \sqrt{31}}^{\text{مثبت}} \right| + \left| \overbrace{5 - \sqrt{31}}^{\text{منفی}} \right| = 12 - \sqrt{31} - (5 - \sqrt{31}) =$$

$12 = \sqrt{144} > \sqrt{31}$ $5 = \sqrt{25} < \sqrt{31}$

$$12 - \sqrt{31} - 5 + \sqrt{31} = 7$$

$$\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - |-9\sqrt{10}| = \left| \overbrace{3 - \sqrt{10}}^{\text{منفی}} \right| - \left| \overbrace{-9\sqrt{10}}^{+9\sqrt{10}} \right| = -(3 - \sqrt{10}) - (+9\sqrt{10}) =$$

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$$-3 + \sqrt{10} - 9\sqrt{10} = -3 - 8\sqrt{10}$$

❖ **توجه:** در فصل چهار خواهیم دید که برای جمع و تفریق رادیکال هایی که عبارت زیر رادیکال آنها مساوی است، کافی است ضریب آن رادیکال ها را با هم جمع جبری کنیم. مثلاً

$$\boxed{9}\sqrt{5} - \boxed{2}\sqrt{5} = (9 - 2)\sqrt{5} = 7\sqrt{5} \quad \text{و} \quad \sqrt{7} - 4\sqrt{7} = (1 - 4)\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$$

📌 **تمرین ۱۶.** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف * $x < 0$ ، $y < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| + \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{منفی}} \right| = -x - y$$

حل:

ب * $x < 0$ ، $y > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| + \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{مثبت}} \right| = -x + y = y - x$$

حل:

پ * $x < 0$ ، $y < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| - \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{منفی}} \right| = -x - (-y) = -x + y = y - x$$

حل:

ت * $x < 0$ ، $y > 0 \Rightarrow \sqrt{(xy)^2} =$

$$\sqrt{(xy)^2} = \left| \overbrace{x \times y}^{\text{منفی}} \right| = -(xy) = -xy$$

$- \times + = -$

حل:

$$x < 0 \Rightarrow 5\sqrt{x^2} - x =$$

$$5\sqrt{x^2} - x = 5 \times | \overset{\text{منفی}}{\hat{x}} | - x = -5x - x = -6x$$

حل:

نمونه سوال امتحانی پایان فصل

- ۱- اگر $a < 0, b > 0$ آنگاه $|a-b| = b-a$ ص غ
- ۲- مجموعه عدد های گویا را می توان با محور اعداد نمایش داد. ص غ
- ۳- عدد $3/252252225 \dots$ عددی گویا است. ص غ
- ۴- تساوی $\sqrt{a^2} = -a$ به ازای $a < 0$ همواره برقرار است. ص غ
- ۵- حاصل $\mathbb{R} - \mathbb{Q}'$ برابر با مجموعه اعداد است.
- ۶- حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ برابر است.
- ۷- اگر $x > 0, y > 0$ و باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ برابر با است.
- ۸- عدد $0/345$ از عدد $0/345$ است. (بزرگتر-کوچکتر-مساوی)
- ۹- مقدار عبارت $|x| + x$ به ازای $x = -2$ برابر کدام گزینه است
۴ -۴ ۰ ۲
- ۱۰- نمایش اعشاری کدام یک از کسره های زیر مختوم است.
 $\frac{7}{11}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{8}{20}$ $\frac{2}{3}$
- ۱۱- عدد $\sqrt{3} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است.
۰, ۱ ۴, ۳ ۳, ۲ ۲, ۱
- ۱۲- کدام گزینه نادرست است
 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- ۱۳- الف-بین $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}$ سه کسر بنویسید.
- ب- نمایش اعشاری کسر $\frac{14}{55}$ متناوب است یا مختوم؟

- ۱۴- مجموعه ی $A = \{x \in \mathbb{R} - 2 \leq x < 3\}$ را روی محور نشان دهید.
- سپس با توجه به مجموعه A درستی و نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$$\sqrt{5} + 1 \in A \quad +3 \in A \quad -2 \in A$$

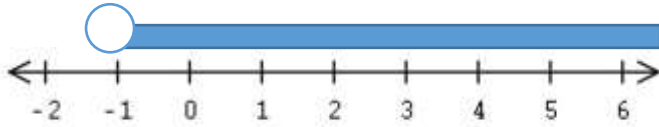
۱۵- بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید

۱۶- عدد $3 - \sqrt{5}$ را روی محور نشان دهید.

۱۷- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) \times \frac{5}{3}$$

۱۸- با توجه به محور مجموعه ی متناظر را بنویسید.



۱۹- در مورد مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q}' \mid -2 < x < 3\}$ کدام درست و کدام نادرست است.

$$\begin{array}{cccccc} 1/53553553.... \in A & \pi \notin A & \sqrt{5} \in A & -\frac{1}{3} \notin A & \frac{5}{3} \in A \\ & & & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \in A & 0 \in A \end{array}$$

۲۰- حاصل عبارت های زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بدست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & |5 - \sqrt{5}| + |-4 - \sqrt{5}| \\ \text{ب)} & \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} + -\sqrt{10} \end{array}$$

۲۱- حاصل عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده بنویسید.

$$\begin{array}{l} \text{الف- اگر } a = -2, b = 3, c = -4 \text{ باشد, } |a+b| + 5|c-b| \\ \text{ب- اگر } a = -2, b = \sqrt{3}, c = 3 \text{ باشد, } |2a-b+c| \end{array}$$



استدلال: یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

در بسیاری از کارهای روزمره به استدلال نیاز پیدا می کنیم و از راه حل های مختلفی برای استدلال کردن استفاده می کنیم که درجه ی اعتبار آن ها با هم متفاوت است و ممکن است به نظر دیگران قابل اعتماد یا معتبر نباشد.

مثال: استدلالهای زیر را از نظر اعتبار مقایسه کنید.

(الف) در تمام خانواده هایی که دو فرزند به نام علی و حسین دارند علی فرزند بزرگ تر بوده است پس دوست من که علی نام دارد از برادرش حسین بزرگتر است. **(نامعتبر - بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)**

(ب) چون اعداد ۳ و ۵ و ۷ اعدادی اول و فرد هستند ، بنابراین همه ی اعداد فرد اولند. **(نامعتبر - بر پایه ی تعداد محدودی از مشاهدات)**

(ج) چون همه ی قرص های مسکن خواب آور هستند پس در این قرص ها ماده ای هست که باعث خواب آلودگی می شود. **(معتبر - بر پایه ی استنتاج منطقی)**

برخی از انواع استدلال:

بیشتر بدانیم

استدلال ؛ توانمندی ارزشمند ذهن انسان است. برخی از انواع استدلال عبارتند از:

(الف) شهودی (درک به کمک حواس)

(ب) استقرایی (استدلال از جزء به کل بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات)

(ج) مثال نقض

(د) استدلال تمثیلی (یافتن نوعی شباهت بین دو چیز مثلا چون علی باهوش است پس برادرش هم باهوش است.

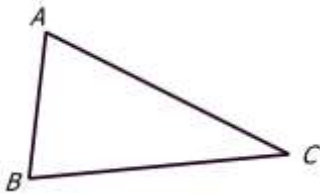
(ه) استدلال استنتاجی (هنگامی که در استدلال از یک نظریه ی کلی استفاده می کنیم تا به فرضیه های جزئی

برسیم) و ...

نکته: معتبرترین نوع استدلال در هندسه استدلال استنتاجی است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد ، اثبات می گوییم.

به مثال زیر توجه کنید.

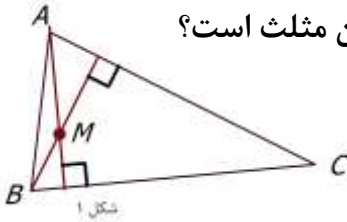


مثال : الف) دو ارتفاع این مثلث را رسم کنید.

ب) آیا محل برخورد ارتفاع ها درون مثلث است؟

ج) آیا با مثال بالا می توان نتیجه گرفت محل برخورد دو ارتفاع هر مثلث همیشه درون مثلث است؟

پاسخ:



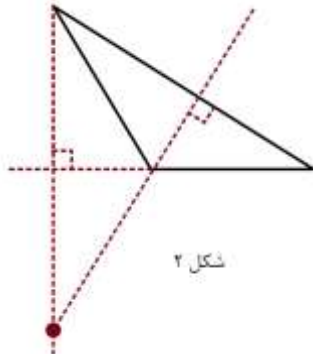
الف) در شکل ۱ ارتفاع های دو مثلث را به کمک گونیا ترسیم کرده ایم.

ب) بله طبق شکل ۱ محل برخورد با نقطه ی M نمایش داده شده است.

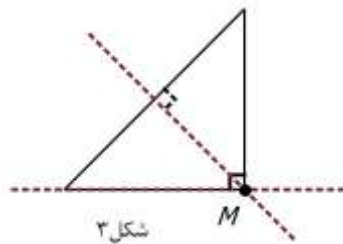
ج) خیر در شکل ۲ و ۳ محل برخورد دو ارتفاع درون مثلث نیست.

در مثلث قائم الزاویه محل برخورد ارتفاع ها ، راس زاویه ی قائمه و در مثلث هایی

با داشتن یک زاویه ی باز ، محل برخورد بیرون مثلث است



شکل ۲



شکل ۳



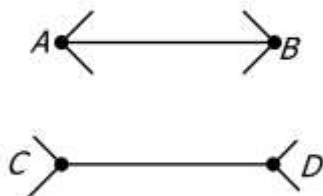
مثال نقض: برای رد درستی یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم. کافی است با یک مثال مناسب نشان دهیم آن ادعا نادرست است. به این مثال نادرست ، مثال نقض می گویند.

برای رد درستی هر یک از ادعاهای زیر از مثال نقض استفاده کنید.

الف) جمع دو عدد اول همواره مرکب است. **مثال نقض :** جمع ۲ و ۵ عدد ۷ است و می دانیم ۷ عددی اول است.

ب) تمام شکل های هندسی زاویه دارند. **مثال نقض :** دایره ، بیضی ، کره و ... زاویه ندارند

ج) همه ی اعداد اول فرد هستند. **مثال نقض :** ۲ عددی اول ولی زوج است



به تصویر مقابل دقت کنید.

به نظر شما کدام پاره خط بزرگتر است؟

با استفاده از خط کش یا کاغذ شفاف از درستی پاسخ خود اطمینان پیدا کنید.

آیا می توان با مشاهده یا استفاده از حواس از درستی یک موضوع اطمینان حاصل کرد؟ چرا؟

خیر زیرا حواس ما خطا دارند و گاهی دچار خطای دید می شویم.

نکته: ضعیف ترین استدلال ، استدلال شهودی است.

سوال: برای هر کدام از مثال های زیر مشخص کنید استدلال به کار رفته معتبر است یا غیر معتبر؟ چرا؟

رضا می گوید: معلم هیچ وقت روزهای دوشنبه از من درس نپرسیده است. امروز دوشنبه است پس امروز هم معلم از من درس نمی پرسد.

پاسخ: خیر زیرا بر اساس مشاهدات گذشته نتیجه ای گرفته است که ممکن است درست نباشد.

احمد می گوید: عدد ۳۵۹۱ بر ۳ بخش پذیر است چون جمع ارقامش ۱۸ و بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات قبلی می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که جمع رقم هایش بر ۳ بخش پذیر باشد.

حسین می گوید: در لوزی مثل متوازی الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می کنند.

پاسخ: بله زیرا بر اساس اطلاعات گذشته می دانیم لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و در متوازی الاضلاع قطرهای منصف یکدیگرند پس لوزی نیز این خاصیت را دارد.

امیر می گوید: جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است زیرا مثلث متساوی الاضلاع این ویژگی را دارد.

پاسخ: خیر زیرا با ذکر یک مثال درست نمی توان نتیجه ای را برای تمامی مثلث ها بیان کرد

سوال: یک استدلال بنویسید که شبیه استدلال زیر باشد.

- تیم فوتبال مدرسه ی ما هر بار با لباس قرمز وارد زمین شده است مسابقه را باخته است. رنگ لباس امروز این تیم قرمز است پس امروز هم مسابقه را می بازد.

پاسخ: همه ی فرزندان خاله ی من پسر هستند. پس فرزند دیگرش که ماه آینده به دنیا می آید هم پسر خواهد

بود. (نتیجه گیری اشتباه بر اساس توجه به مشاهدات قبلی)



سوال: یک استدلال بنویسید که در آن فردی با توجه به مشاهدات قبل خود، نتیجه ای نادرست می گیرد.

پاسخ: هر بار باران می بارد حیاط مدرسه ی ما خیس می شود. امروز حیاط مدرسه خیس است پس حتما دیشب

باران باریده است. (نادرست به این علت که ممکن است علت خیس بودن زمین باران نباشد و حیاط مدرسه را شسته باشند)

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.



درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

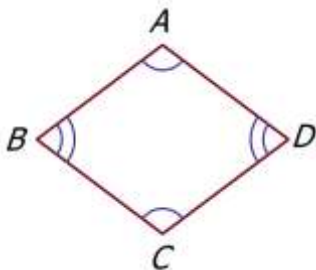
برای اثبات یا مشخص کردن درستی یک موضوع ابتدا باید بدانیم در مورد این موضوع چه اطلاعاتی وجود دارد.

فرض: به اطلاعات داده شده در صورت مساله فرض مساله (داده های مساله) می گویند.

بعد از تشخیص فرض ، باید دقت کنیم مساله چه چیزی را از ما می خواهد و باید چه چیزی را نشان بدهیم.

حکم: خواسته ی مساله را حکم مساله می گویند.

برای اثبات یک ادعا در روند استدلالمان از داشته های مساله (فرض) و اصولی که از قبل درستی آن ها برای ما مشخص شده است برای رسیدن به حکم مساله استفاده می کنیم.

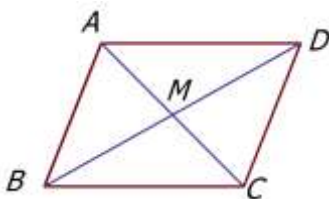


مثال: در هر کدام از مساله های زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

(۱) در لوزی ، زاویه های رو به رو با هم برابرند.

پاسخ: برای نوشتن فرض و حکم می توان روابط را به زبان ریاضی نوشت

فرض	چهارضلعی ABCD لوزی است
حکم	زاویه های رو به رو برابرند (به زبان ریاضی: $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$)



(۲) در متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند.

فرض	چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است
حکم	قطر ها همدیگر را نصف می کنند (به زبان ریاضی: $\overline{BM} = \overline{DM}$ و $\overline{AM} = \overline{CM}$)



(۳) در مثلث متساوی الساقین زاویه های مجاور به ساق های برابر، با هم برابرند.

فرض	ABC مثلث متساوی الساقین است (به زبان ریاضی: $\overline{AB} = \overline{AC}$)
حکم	زوایای مجاور به ساق با هم برابرند (به زبان ریاضی: $\hat{B} = \hat{C}$)

(۴) در مستطیل قطرها با هم برابرند.



شکل ۱

فرض	مستطیل ABCD است
حکم	قطرهای مستطیل ، مساوی است

پاسخ:

با توجه به شکل ۱ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:

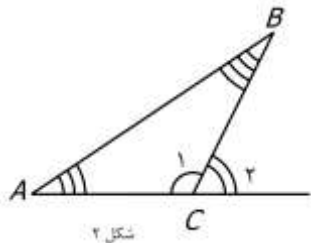
$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \text{فرض : } \overline{AB} &= \overline{CD} \text{ و } \overline{AD} = \overline{BC} \\ \text{حکم : } \overline{AC} &= \overline{BD} \\ (AB \parallel CD \text{ و } AD \parallel BC) \end{aligned}$$

مثال: در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.

پاسخ:



فرض	ABC مثلث است
حکم	اندازه ی زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن برابر است.



شکل ۲

با توجه به شکل ۲ فرض و حکم را می توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$\begin{aligned} \text{فرض : } \begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_1 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} & \quad \text{حکم : } \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2 \end{aligned}$$

حل:

ضلع AC را امتداد و زاویه ی خارجی C را مشخص می کنیم. بنا به دانسته های قبلی می دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است. همچنین دو زاویه $\widehat{C}_1$ و $\widehat{C}_2$ مکملند پس مجموع این دو زاویه هم ۱۸۰ درجه است بنابراین استدلال زیر را داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}_1 &= 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \cancel{\widehat{C}_1} = \cancel{\widehat{C}_1} + \widehat{C}_2 \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}_2$$

دقت کنیم با استدلالی مشابه با استدلال بالا این خاصیت برای زاویه های خارجی دیگر مثلث هم برقرار است پس می توان این ویژگی را به هر زاویه از مثلث **تعمیم** داد.

تعمیم: وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم (مانند زاویه ی خارجی C در مثال بالا) اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر عضوهای مجموعه (دو زاویه ی خارجی دیگر مثلث مثال بالا) باشد، می توان درستی نتیجه را به همه ی عضوهای مجموعه (همه ی زوایای خارجی) تعمیم داد.

برای درک بهتر مفهوم تعمیم به مثال های زیر دقت کنید.

مثال ۱) در هر متوازی الاضلاع ، ضلع های رو به رو به دو به دو موازی و مساویند. می دانیم مربع ، مستطیل و لوزی هر سه نوعی متوازی الاضلاع هستند. بنابراین این ویژگی به این سه شکل هم تعمیم داده می شود. یعنی در مربع ، مستطیل و لوزی نیز اضلاع رو به رو با هم موازی و برابرند.

مثال ۲) آیا استدلال های زیر معتبر هستند؟ چرا؟



$ABCD$ مستطیل است $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{مستطیل یک متوازی الاضلاع است} \\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ متوازی الاضلاع است} \end{cases}$

شکل ۱

پاسخ: با یک مثال نقض نشان می دهیم استدلال نادرست است. (شکل ۱ متوازی الاضلاعی که مستطیل نیست)

مثال ۳) آیا استدلال زیر معتبر است؟ چرا؟

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \\ \text{مربع نوعی لوزی است} \end{cases}$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگرند

پاسخ: استدلال درست است. زیرا مربع نوعی لوزی است پس خواص لوزی به مربع تعمیم داده می شود. **فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.**



درس سوم: هم نهشتی مثلث ها

ابتدا به تعاریف زیر دقت کنیم:

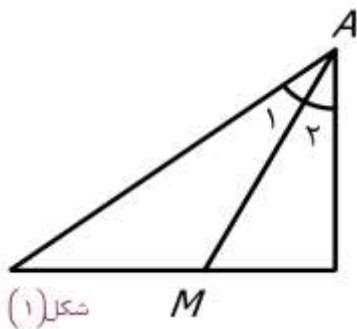
نیمساز: نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل یا امتداد آن عمود باشد.

عمود منصف: خطی است که از وسط ضلع بر آن عمود شده باشد.

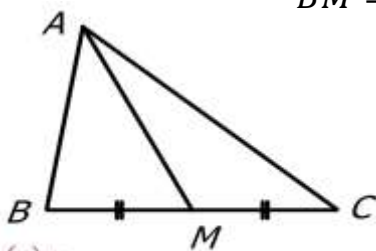
میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

با توجه به نکات درس قبل، در صورت سوال از هر کدام از عبارات بالا می توان فرض مناسب را در نظر گرفت. برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.



مثال ۱: در شکل (۱) پاره خط AM نیمساز زاویه A است یعنی: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

مثال ۲: در شکل (۲) پاره خط AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است یعنی: $\overline{BM} = \overline{CM}$



برای اینکه نشان دهیم دو مثلث هم نهشت هستند می توانیم از یکی از حالت های زیر استفاده کنیم و لازم نیست برابری تمامی اضلاع و زاویه ها بررسی گردد.

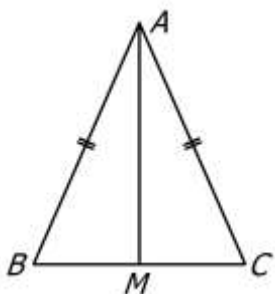
حالت اول: برابری سه ضلع (ض ض ض)

اگر هر سه ضلع مثلث اول با اضلاع مثلث دوم دو به دو برابر باشند آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده BC است. چرا دو مثلث ABM و ACM

هم نهشتند؟

پاسخ:



میانه قاعده را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، پس $\overline{BM} = \overline{CM}$. بنابراین داریم:

$\overline{AB} = \overline{AC}$: زیرا مثلث متساوی الساقین است

بنا به حالت (ض ض ض)

$\overline{BM} = \overline{CM}$: زیرا AM میانه است

$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$

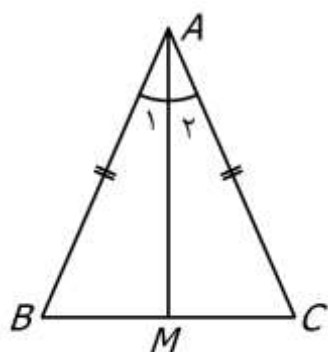
$\overline{AM} = \overline{AM}$: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است

حالت دوم: برابری دو ضلع و زاویه ی بین آن ها (ض ز ض)

اگر دو ضلع از مثلث اول با دو ضلع از مثلث دوم برابر و زاویه ی بین آن دو ضلع در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال ۲: مثلث ABC متساوی الساقین و AM نیمساز زاویه ی A است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟

پاسخ: AM نیمساز زاویه ی A است پس: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ بنابراین:



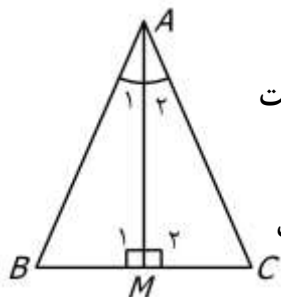
بنابراین حالت (ض ز ض) بنا به حالت (ض ز ض)

$\overline{AB} = \overline{AC}$: زیرا مثلث متساوی الساقین است
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$: زیرا AM نیمساز $\widehat{A}$ است
 $\overline{AM} = \overline{AM}$: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است
 $\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$

حالت سوم: برابری دو زاویه و ضلع بین آن ها (ز ض ز)

اگر دو زاویه از مثلث اول با دو زاویه از مثلث دوم برابر و ضلع بین آن دو زاویه در هر دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث حتما هم نهشت هستند.

مثال: در مثلث ABC پاره خط AM نیمساز زاویه ی A و بر BC عمود است. چرا دو مثلث ABM و ACM هم نهشتند؟



بنابراین حالت (ز ض ز) بنا به حالت (ز ض ز)

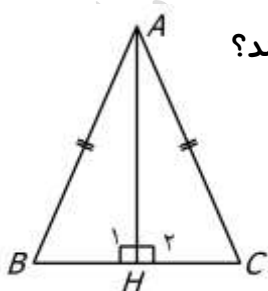
$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ$: زیرا AM بر BC عمود است
 $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$: زیرا AM نیمساز $\widehat{A}$ است
 $\overline{AM} = \overline{AM}$: زیرا ضلع مشترک دو مثلث است
 $\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ACM$

در مثلث های قائم الزاویه اگر وترها برابر باشند می توان از دو حالت دیگر نیز استفاده کرد

حالت چهارم: برابری وتر و یک ضلع زاویه ی قائمه در مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین و AH ارتفاع آن است. چرا دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند؟



پاسخ:

ابتدا توجه کنیم چون AH ارتفاع است پس دو مثلث ABH و ACH قائم الزاویه هستند و

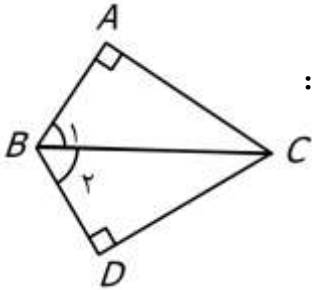
AB و AC در دو مثلث وتر هستند

بنابراین داریم: $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$
 $\overline{AB} = \overline{AC}$
 ضلع مشترک دو مثلث است $\overline{AH}$
 بنا به حالت (وتر و یک ضلع) $\Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle ACH$

حالت پنجم: برابری وتر و یک زاویه ی تند از مثلث قائم الزاویه

دقت کنیم این حالت هم مانند حالت قبل فقط مخصوص مثلث های قائم الزاویه است.

مثال: در شکل داده شده BC نیمساز زاویه ی B است. چرا دو مثلث ABC و DBC هم نهشتند؟



پاسخ: با توجه به این که دو مثلث قائم الزاویه هستند و وتر هر دوی آن ها BC است داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \overline{BC} = \overline{BC} \\ \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بنا به حالت (وتر و یک زاویه ی تند)} \\ \Rightarrow \Delta ABC \cong DBC \end{array}$$

فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن



درس چهارم: برای حل یک مساله هندسی راه حل کلی وجود ندارد ولی می توان مراحل را مشخص کرد و با دقت بیشتری به جواب رسید.

قدم های حل مساله:

- (۱) فهمیدن صورت مساله
- (۲) رسم شکل مناسب
- (۳) تشخیص فرض و حکم
- (۴) استدلال

ابتدا صورت مساله را با دقت می خوانیم و مفاهیم تشکیل دهنده ی آن را شناسایی می کنیم. اگر مساله فاقد شکل است با توجه به صورت مساله ، یک شکل مناسب برای آن رسم می کنیم. داده های مساله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص می دهیم و در یک جدول می نویسیم و برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا می کنیم و مساله را اثبات می کنیم.

برای بهتر فهمیدن گام های حل مساله به سوال زیر توجه کنید.

مثال ۱: نشان دهید زوایای متقابل به راس با هم برابرند.

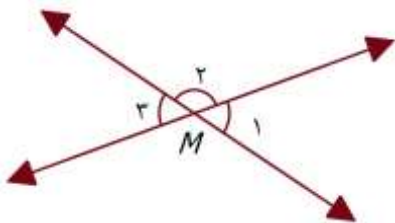
پاسخ: گام اول: زوایای متقابل به راس از برخورد دو خط راست ایجاد می گردد.

گام دوم: دو زاویه متقابل به راس رسم می کنیم و زاویه ها را نام گذاری می کنیم.

گام سوم: فرض مساله متقابل به راس بودن دو زاویه و حکم مساله نشان دادن تساوی آن هاست.

گام چهارم: دقت کنیم طبق شکل دو زاویه ی ۱ و ۲ مکمل و دو زاویه ی ۲ و ۳ نیز مکمل یکدیگرند. بنابراین طبق

شکل زیر داریم:



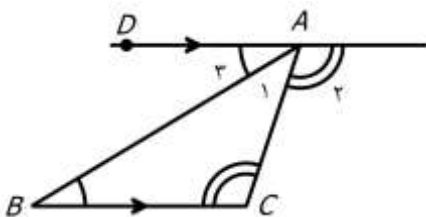
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ \\ \widehat{M_3} + \widehat{M_2} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M_1} + \cancel{\widehat{M_2}} = \widehat{M_3} + \cancel{\widehat{M_2}} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_3}$$

فرض **حکم**

مثال ۲: نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

پاسخ: مثلث دلخواه ABC را رسم می کنیم. از راس دلخواهی خطی موازی با ضلع مقابل به آن رسم می کنیم

(مطابق با شکل ۱) و با توجه به خاصیت خطوط موازی و مورب و تساوی زوایا حکم را اثبات می کنیم.



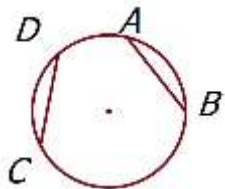
طبق فرض $AD \parallel BC$ و AB مورب است پس: $\widehat{B} = \widehat{A_3}$

طبق فرض $AD \parallel BC$ و AC مورب است پس: $\widehat{C} = \widehat{A_2}$

AD خط راست است پس: $\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{A_3} \\ \widehat{C} = \widehat{A_2} \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{B} + \widehat{A_1} + \widehat{C} = \widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$$

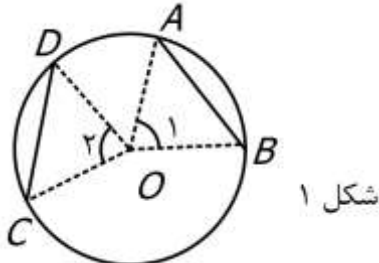
گاهی در اثبات یک حکم باید از تساوی اجزای متناظر استفاده کرد به مثال زیر و گام های حل مساله توجه کنید:



مثال ۳: نشان دهید در یک دایره وترهای مقابل به کمان های مساوی با هم برابرند.

گام اول: در صورت سوال از کمان و دایره نام برده شده بنابراین از مفاهیم مربوط به آن باید استفاده کرد.

گام دوم: برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم.



گام سوم: در دایره ی رسم شده مرکز را با نقطه ی O نشان داده ایم و AB و CD طبق فرض مساله کمان هایی

مساوی هستند. می خواهیم ثابت کنیم $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (حکم مساله)

گام چهارم: برای نشان دادن این حکم دو مثلث در نظر میگیریم و

هم نهشتی بین آن ها را اثبات و از این هم نهشتی تساوی اجزای آن

ها را نتیجه می گیریم. بنابراین طبق شکل ۱ داریم:

چون کمان های AB و CD با هم برابرند زوایای مرکزی مقابل به آن ها هم با هم برابرند. از طرفی اضلاع دو مثلث

شعاع های دایره هستند بنابراین با خلاصه کردن توضیحات بالا داریم:

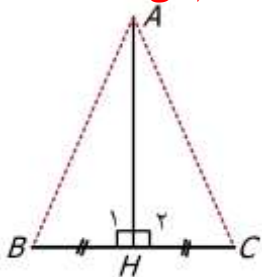
$$\underbrace{\left. \begin{array}{l} \overline{BO} = \overline{DO} \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ \overline{AO} = \overline{CO} \end{array} \right\}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \underbrace{\overline{AB} = \overline{CD}}_{\text{حکم}}$$

(ض ض ض) تساوی اجزای متناظر در دو مثلث

مثال ۴: نقطه ی A روی عمودمنصف BC است. می خواهیم نشان دهیم $AB=AC$ (یعنی فاصله ی A از دو سر پاره

خط برابر است.) نقطه ی A را به دو سر پاره وصل می کنیم و دو مثلث قائم الزاویه می سازیم.

دقت کنیم عمود منصف خطی است که بر پاره خط عمود شده و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.



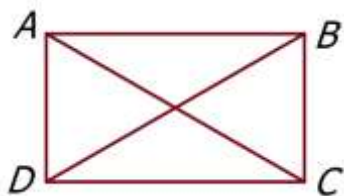
$$\left. \begin{array}{l} \overline{BH} = \overline{CH} \text{ : زیرا AH عمود منصف BC است} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ \overline{AH} = \overline{AH} \text{ : زیرا ضلع مشترک دو مثلث است} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle ACH \quad (\text{ض ض ض})$$

وقتی دو مثلث هم نهشت باشند اجزای متناظر آن ها با هم برابر است بنابراین داریم: $\overline{AB} = \overline{AC}$ پس حکم ما

برای نقطه ی A اثبات شد. با توجه به مساله ی بالا با تغییر مکان نقطه ی A برای سایر نقاط روی عمود منصف با

همان استدلال بالا و در حالت کلی می توان نشان داد هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد از دو سر

آن به یک فاصله است و این خاصیت به تمام نقاط روی عمودمنصف تعمیم داده می شود.



تمرین ۱: نشان دهید قطرهای مستطیل با هم برابرند.

پاسخ:

برای درک بهتر شکل ترسیم می کنیم. در مستطیل داده شده AC و BD قطرهای مستطیل هستند.

می خواهیم نشان دهیم: $\overline{AC} = \overline{BD}$

فرض مساله مستطیل بودن چهارضلعی است و می دانیم در مستطیل اضلاع رو به رو به دو به دو مساوی و هر چهار

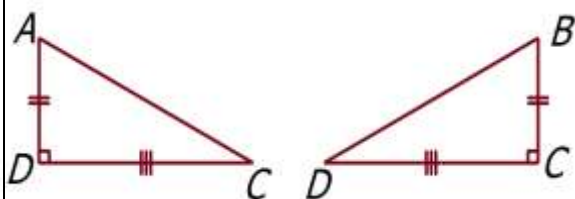
زاویه قائمه هستند. با انتخاب دو مثلث مناسب و نشان دادن هم نهشتی بین آن ها می توان تساوی قطرها را

نتیجه گرفت. دقت کنیم مثلتهایی را انتخاب کنیم که قطرهای AC و BD اجزای متناظر آن ها باشند.

می توان دو مثلث قائم الزاویه ی ADC و BDC را انتخاب کرد برای درک بهتر این دو مثلث را به صورت جداگانه

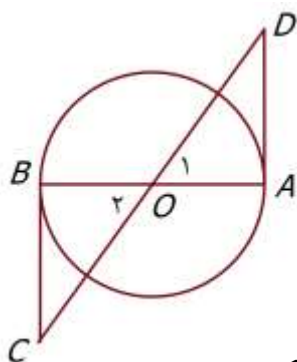
می کشیم.

طبق فرض مساله و خواص مستطیل استدلال زیر را داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \widehat{D} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک هر دو مثلث: } \overline{DC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC \end{array} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{AC} = \overline{BC}}_{\text{حکم}}$$

فرض



تمرین ۲: در شکل مقابل O مرکز و BC و AD بر دایره مماسند. نشان دهید: $\overline{AD} = \overline{BC}$

پاسخ:

دقت کنیم شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است

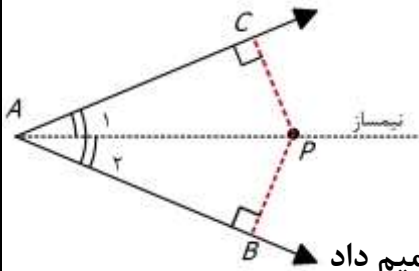
پس زوایای A و B قائمه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OB} = \overline{OA} \\ \widehat{B} = \widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{O_2} = \widehat{O_1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(فرض)} \\ \rightarrow \Delta BOC \cong \Delta AOD \end{array} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث}} \underbrace{\overline{BC} = \overline{AD}}_{\text{حکم}}$$

فرض

تمرین ۳: نشان دهید فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو سر زاویه برابر است.

پاسخ: نقطه ی P را روی نیم ساز زاویه ی A در نظر می گیریم. برای نشان دادن فاصله ی P از اضلاع زاویه، از نقطه ی P بر دو ضلع زاویه عمود رسم می کنیم و نقطه ی برخورد با ضلع را B و C می نامیم. باید نشان دهیم: $\overline{BP} = \overline{CP}$. دقت کنیم AP وتر مشترک دو مثلث است پس می توان از حالت وتر و یک زاویه تند استفاده کرد.

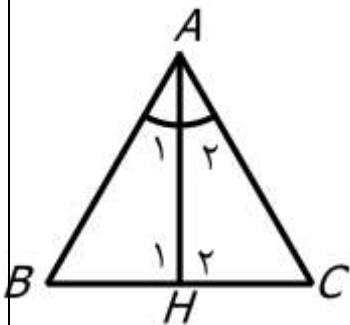


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{B} = 90^\circ \\ \text{وتر مشترک: } AP \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه تند)} \\ \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta ABP \end{array} \Rightarrow \underbrace{\overline{PC} = \overline{PB}}_{\text{حکم}}$$

دقت کنیم این استدلال را به هر نقطه ی دیگر روی نیمساز زاویه ی A می توان تعمیم داد

تمرین ۴: نشان دهید در هر مثلث متساوی الاضلاع نیمساز وارد بر قاعده، عمود منصف قاعده نیز می باشد.

پاسخ: ABC متساوی الاضلاع و AH نیمساز زاویه A است. باید نشان دهیم: $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$ و $\overline{BH} = \overline{CH}$. نشان می دهیم دو مثلث ABH و ACH هم نهشتند و از تساوی اجزای متناظر به خواسته ی مساله می رسیم.

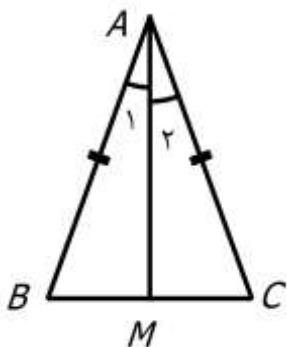


$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \text{در هر دو مشترک: } AH \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض)} \\ \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ACH \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \\ \overline{BH} = \overline{CH} \end{array} \right.$$

با استدلالی مشابه استدلال بالا این خاصیت به نیمساز های وارد بر قاعده های دیگر هم تعمیم داده می شود.

تمرین ۵: نشان دهید در مثلث متساوی الساقین میانه ی وارد بر قاعده، نیم ساز راس مثلث است.

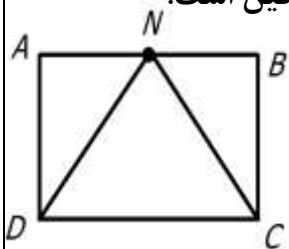
پاسخ: مثلث ABC متساوی الساقین و AM میانه ی وارد بر قاعده ی BC است. نشان می دهیم: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{MB} = \overline{MC} \\ \text{در هر دو مشترک: } AM \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ض)} \\ \Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta ACM \end{array} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

توجه کنیم که خاصیت اثبات شده برای میانه ی وارد بر قاعده برای میانه ی وارد بر ساق هم قابل تعمیم نیست، زیرا میانه های دیگر ویژگی های میانه ی وارد بر قاعده ی BC را ندارند.

تمرین ۶: نقطه ی N وسط طول مستطیل ABCD است. ثابت کنید مثلث NBC متساوی الساقین است.

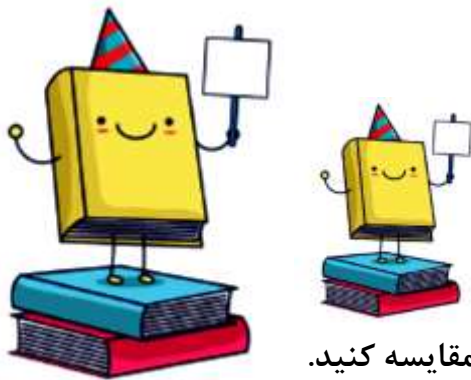


پاسخ: می خواهیم نشان دهیم $\overline{DN} = \overline{CN}$

برای اثبات این حکم دو مثلث AND و BNC که در آن ها DN و CN اجزای متناظرند را در نظر گرفته و هم نهشتی آن ها را اثبات و از تساوی اجزای متناظرشان حکم مساله را نتیجه می گیریم.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AN} = \overline{BN} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{تساوی اجزای متناظر در دو مثلث} \\ \text{(ض ض ض)} \end{array} \Rightarrow \triangle ADN \cong \triangle BCN \Rightarrow \overline{DN} = \overline{CN} \Rightarrow \triangle NBC \text{ متساوی الساقین است}$$

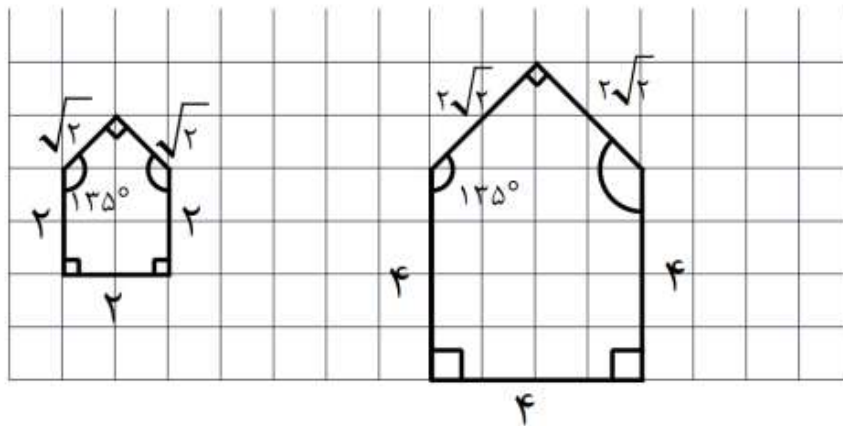
فرزندم! با مرور نکات بالا برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.



درس پنجم: شکل های متشابه

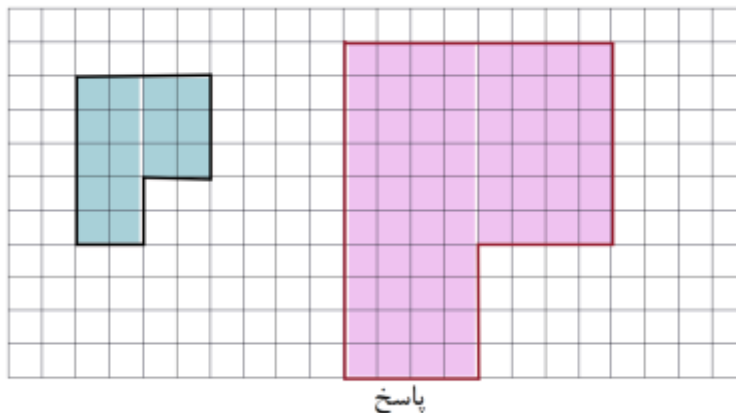
به تصویر مقابل نگاه کنید . در مورد شباهت ها یا تفاوت های این دو تصویر چه چیزی می توان گفت؟

مثال ۱) اندازه ی اضلاع و زوایای شکل های زیر را بنویسید و آن ها را با هم مقایسه کنید.



پاسخ: اندازه ی اضلاع و زوایای هر کدام نوشته شده است . با مقایسه ی دو شکل می بینیم زوایای متناظر با هم برابر و اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر کرده اند (دو برابر شده اند)

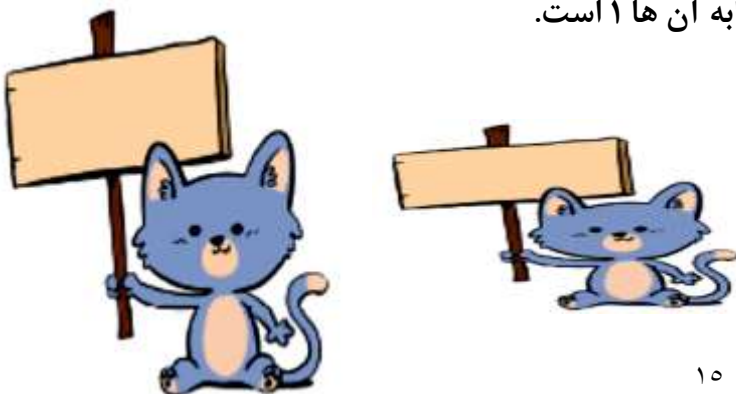
مثال ۲) در صفحه ی شطرنجی شکلی رسم کنید که اندازه ی اضلاعش دو برابر شکل رسم شده و زاویه های متناظر با هم برابر باشند.



هرگاه در دو چندضلعی با تعداد اضلاع برابر ، همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا تغییر نکرده باشند) و زوایای متناظر در هر دو شکل با هم برابر باشند آن دو چندضلعی با هم **متشابهند**. به نسبت بین دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، **نسبت تشابه** می گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت با هم متشابهند و نسبت تشابه آن ها ۱ است.

دو تصویر زیر متشابه نیستند چون متناسب نیستند.



مثال ۳: نسبت تشابه دو مربع $\frac{2}{7}$ است. اگر ضلع مربع کوچکتر ۶۰ سانتیمتر باشد ضلع مربع بزرگتر چقدر است؟

پاسخ: با استفاده از نسبت تشابه و تناسب بین اضلاع داریم:

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{2}{7} = \frac{60}{x} \quad x = 7 \times 30 = 210$$

مثال ۴: مثلثی به اضلاع ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر با مثلثی که اضلاعش به ترتیب از کوچک به بزرگ ۱ - x و ۱۵ و $2y + 3$ است متشابهند.

الف) نسبت تشابه دو شکل را بنویسید.

ب) مقدار x و y را محاسبه کنید.

پاسخ: چون اضلاع دو مثلث به ترتیب کوچک به بزرگ نوشته شده اند پس تناسب بین اضلاع به صورت زیر است:

$$\frac{4}{x-1} = \frac{5}{15} = \frac{7}{2y+3}$$

پس نسبت تشابه آن ها $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ یا ۱ به ۳ است.

با تشکیل تناسب اضلاع و محاسبه ی آن ها داریم:

$$2y + 3 = 3 \times 7 = 21 \rightarrow 2y = 21 - 3 = 18 \rightarrow y = 18 \div 2 = 9$$

$$x - 1 = 4 \times 3 = 12 \rightarrow x = 12 + 1 = 13$$

در درس مطالعات اجتماعی با نقشه و کاربرد نقشه آشنا شدید. نقشه ها شکل های متشابه با طبیعت می باشند و در نقشه نسبت تشابه را مقیاس می نامند. در مطالعات هشتم در مورد مقیاس در نقشه مطالبی را آموخته اید.

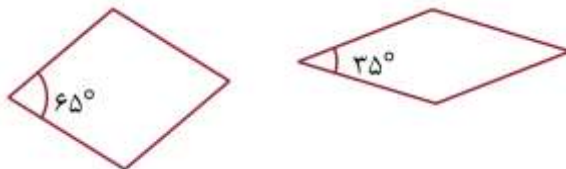
مثال ۵: مقیاس یک نقشه ۱:۲۰۰۰۰ است. اگر فاصله ی دو مدرسه در نقشه ۴ cm باشد، فاصله ی این دو میدان در واقعیت چقدر است؟

$$\frac{\text{فاصله در نقشه}}{\text{فاصله ی واقعی}} = \frac{1}{20000} = \frac{4}{x} \quad x = 4 \times 20000 = 80000 \text{ cm} = 800 \text{ m}$$

مثال ۶: با یک مثال نشان دهید جملات زیر نادرستند.

الف) هر دو لوزی دلخواه متشابهند.

در این دو شکل زوایای متناظر برابر نیستند



ب) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند.

در این دو شکل اضلاع متناظر متناسب نیستند

(نسبت طول ها ۱ به ۲ است ولی عرض ها برابرند)



نکته ۱: هر دو مربع دلخواه و هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه و در حالت کلی هر دو چندضلعی منتظم با تعداد اضلاع مساوی دلخواه با هم متشابهند.

مثال ۷: اضلاع دو مربع داده شده ۱ و ۳ سانتیمتر است.



(الف) نسبت تشابه دو مربع را بنویسید.

$$\frac{\text{ضلع مربع کوچک}}{\text{ضلع مربع بزرگ}} = \frac{1}{3}$$

(ب) محیط دو مربع را محاسبه کنید و نسبت محیط دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت محیط های آن ها وجود دارد؟

نسبت محیط دو مربع با نسبت تشابه آن ها برابر است.

$$\frac{\text{محیط مربع کوچک}}{\text{محیط مربع بزرگ}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

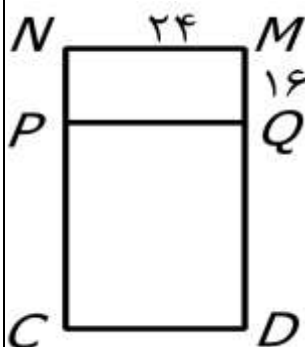
(ج) مساحت دو مربع را محاسبه کنید و نسبت مساحت دو مربع را محاسبه کنید. چه رابطه ای با نسبت تشابه دو مربع و نسبت مساحت های آن ها وجود دارد؟

نسبت مساحت دو مربع با مجذور نسبت تشابه آن ها برابر است.

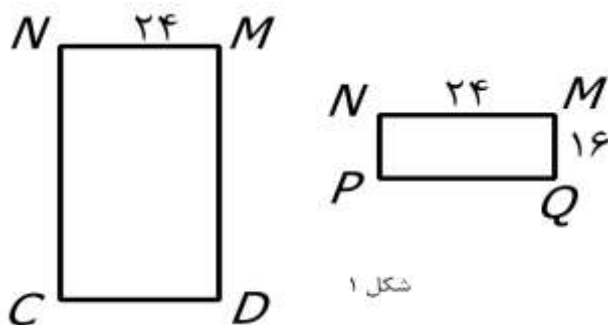
$$\frac{\text{مساحت مربع کوچک}}{\text{مساحت مربع بزرگ}} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

نکته ۲: اگر نسبت تشابه دو شکل $\frac{a}{b}$ باشد نسبت محیط های آنها $\frac{a}{b}$ و نسب مساحت آن ها $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ است.

مثال ۸: دو مستطیل MNPQ و MNCD متشابهند. اندازه ی پاره خط NC را محاسبه کنید.



پاسخ: ابتدا برای تشخیص بهتر اضلاع دو مستطیل را جداگانه ترسیم می کنیم (شکل ۱)



دقت کنیم طول مستطیل کوچک (MN و PQ) و عرض مستطیل بزرگ (MN و CD) با هم برابرند

بنابراین:

$$\frac{MN}{NC} = \frac{MQ}{MN} \Rightarrow \frac{24}{NC} = \frac{16}{24} \Rightarrow NC = \frac{24 \times 24}{16} = 36$$

مثال ۹) مثلثی به اضلاع ۵ و ۳ و ۴ با مثلثی دیگر به محیط ۳۶ متر متشابه است. اضلاع مثلث بزرگتر را محاسبه کنید.

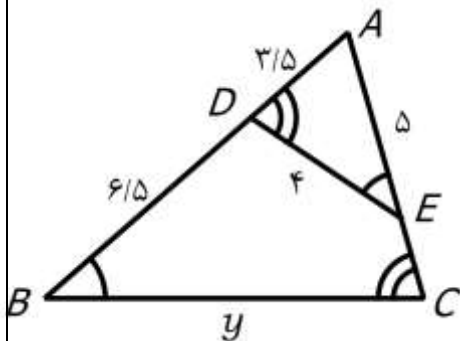
پاسخ: محیط مثلث اول برابر است با: $p_1 = 3 + 4 + 5 = 12$

طبق نکته ی ۲ نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط آن ها برابر است

$$\text{پس} \quad \text{نسبت تشابه} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

بنابراین اضلاع مثلث دوم سه برابر مثلث اول و به ترتیب ۱۵ و ۹ و ۱۲ است.

مثال ۱۰) دو مثلث ABC و ADE متشابهند و زوایای متناظرشان در شکل مشخص شده است. تناسب بین اضلاع را بنویسید و مقدار y را محاسبه کنید.



پاسخ: با توجه به تساوی زوایای متناظر اضلاع متناسب را مشخص می کنیم.

$\hat{B} = \hat{E}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AC و AD با هم متناسبند.

$\hat{C} = \hat{D}$ پس اضلاع مقابل به این دو زاویه یعنی AB و AE با هم متناسبند.

زاویه ی A در هر دو مثلث مشترک است پس اضلاع روبه رو به آن در دو مثلث یعنی BC و DE با هم متناسبند.

$$\text{با توضیحات بالا تناسب بین اضلاع برابر است با:} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\overline{AB} = 6/5 + 3/5 = 10 \quad \text{دقت کنیم}$$

$$\text{پس:} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{4}{y} \rightarrow y = \frac{4 \times 10}{4} = 10$$

فرزندم! نکات ارائه شده را مرور و برای یادگیری بیشتر تمرین های این درس از کتاب درسی را حل کن.

فصل چهارم : درس اول توان صحیح:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \quad 4^3 = 64 \quad (-5)^3 = -125$$

در سال گذشته با اعداد تواندار آشنا شدیم ، مانند:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

***نکته:** هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر یک است .

****** آیا می توانیم یک عدد با توان منفی داشته باشیم ؟ مثلاً حاصل 3^{-5} برابر چند است؟

به جدول زیر توجه کنید: حاصل هر خانه از سطر اول برابر همان عدد است که در زیر آن نوشته شده است .

در سطر اول از سمت چپ ، از توان اعداد تواندار در هر مرحله یک واحد کم می شود و در سطر دوم از سمت چپ اعداد بر ۳ تقسیم می شوند.

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	3^{-5}
۸۱	۲۷	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} \quad 3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \quad 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

همچنین می توانیم بنویسیم :

« اگر عددی غیر از صفر ، توان صحیح منفی داشته باشد ، می توانیم پایه را معکوس کنیم و توان را با علامت مثبت بنویسیم .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{و} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

و به زبان ریاضی می نویسیم

به مثال های زیر توجه کنید :

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \quad \text{و} \quad (-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49} \quad \text{و} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{125}} = \frac{125}{8} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

***نکته:** ترتیب انجام عملیات های ریاضی در محاسبات توانی :

(۱) پرانتز یا گروه (۲) توان یا جذر (۳) ضرب یا تقسیم (۴) جمع یا تفریق

مثال: حاصل عبارت داده شده را بدست آورید ؟

$$27 \left[\left(\frac{15}{36} \times \frac{12}{18} \right)^2 \div \left(\frac{5}{6} \right)^2 \right] = 3^3 \left[\frac{5^2}{3^2 \times 6^2} \times \frac{6^2}{5^2} \right] = 3^3 \times \left(\frac{1}{3^2} \right)^2 = 3^3 \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

جواب:

$$27 = 3^3 \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^2}{6^2}$$

نمونه سوالات امتحانی خرداد ماه ۹۸ :

۱- حاصل عبارت $3^{-1} + 4^{-1}$ برابر کدام گزینه است ؟ (آذربایجان غربی)

$$3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad \text{جواب}$$

$$\frac{1}{4} \quad (\text{د})$$

$$\frac{1}{3} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{7}{12} \quad (\text{ب})$$

$$7^{-1} \quad (\text{الف})$$

۲- حاصل عبارت روبرو را بدست آورید. (یزد)

$$2^{-3} + 4^{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$2^{-1} \dots 2^{-2}$$

$$5^2 \dots (0/2)^{-2}$$

۳- در جای خالی علامت ($< = >$) قرار دهید. (ایلام)

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

جواب :

$$5^2 = 25 \quad \text{و} \quad (0/2)^{-2} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25 \rightarrow 5^2 = (0/2)^{-2}$$

۴- حاصل عبارت زیر را بنویسید. (تهران)

$$\frac{2}{3} - 3^{-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}$$

***** فرزندم با توجه به مطالب بالا ، حالا شما حل کنید .

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{7}\right)^4} =$$

$$(0/3)^{-4} = (-6)^{-2} =$$

** در سالهای گذشته ضرب و تقسیم عبارات تواندار با پایه یا توان مساوی را یاد گرفتیم .

$$3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$$

(الف) در ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توانها را جمع می کنیم .

$$6^4 \times 3^4 = 18^4$$

(ب) در ضرب اعداد تواندار با توانهای مساوی ، پایه ها را ضرب کرده و یکی از توانها را می نویسیم .

$$2^8 \div 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$$

(ج) در تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی، یکی از پایه ها را نوشته و توانها را کم می کنیم .

$$3^7 \div 8^7 = \left(\frac{3}{8}\right)^7$$

(د) در تقسیم اعداد تواندار با توانهای مساوی، پایه ها را بر هم تقسیم کرده و یکی از توانها را می نویسیم .

$$(3^4)^5 = 3^{4 \times 5} = 3^{20}$$

(ه) اگر عددی تواندار درون پرانتز مجدداً به توان برسد ، پایه را نوشته و توانها را در هم ضرب می کنیم .

*** این قوانین برای اعداد تواندار با توانهای صحیح منفی هم کاربرد دارد .

$$3^{-4} \times 3^5 = 3^{-4+5} = 3^1$$

$$6^{-4} \times 3^{-4} = 18^{-4}$$

$$2^{-8} \div 2^{-5} = 2^{-8-(-5)} = 2^{-3}$$

$$3^{-7} \div 8^{-7} = \left(\frac{3}{8} \right)^{-7}$$

$$(3^{-4})^5 = 3^{-4 \times 5} = 3^{-20} = \frac{1}{3^{20}}$$

مثال : پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید .

$$1) 5^{-3} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{125} \quad \checkmark \\ 5^{-3} = \frac{1 \times 151}{5^3} = \frac{1}{125} \end{cases}$$

$$2) 3^{-1} \times 2^{-1} \rightarrow \begin{cases} 5^{-1} \\ 6^{-1} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$3) 5^{-1} + 6^{-1} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \checkmark \\ 11^{-1} \end{cases}$$

$$3^{-1} \times 2^{-1} = (3 \times 2)^{-1} = 6^{-1}$$

$$5^{-1} + 6^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

مثال : جرم یک اتم حدود 10^{-26} گرم است . جرم یک وزنه ی ۱۰۰۰ کیلو گرمی چند برابر جرم این اتم است ؟

جواب : هر کیلوگرم ۱۰۰۰ گرم است یعنی : $1000 = 10^3$ پس : $10^3 \times 10^{-26} = 10^{-23}$

$$10^{-23} \div 10^{-36} = 10^{-23-(-36)} = 10^{13}$$

نکته : برای مقایسه ی اعداد تواندار (با توان عدد طبیعی) یکی از دو کار زیر را انجام دهیم تا راحت تر بتوانیم آنها را مقایسه کنیم .

الف) پایه ها برابر شوند . هر عددی با پایه ی بزرگتر از یک که توان بیشتری باشد، بزرگتر است .

مثال : اعداد تواندار روبرو را از کوچک به بزرگ از سمت چپ به راست مرتب کنید . 2^6 و 8^5 و 16^3 و 4^2

جواب : تمام پایه ها با تجزیه شدن ، به ۲ تبدیل می شوند .

$$2^6 \text{ و } 4^2 = (2^2)^2 = 2^4 \text{ و } 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} \text{ و } 8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$$

$$2^4 < 2^6 < 2^{12} < 2^{15} \quad \text{یا} \quad 4^2 < 2^6 < 16^3 < 8^5$$

***نکته:** اگر توانها برابر باشند و پایه عددی بین صفر و یک باشد . هر چه عدد به صفر نزدیکتر باشد حاصل عبارت کوچکتر است .

$$0./2^5 = 0./00032 < \left(\frac{5}{10}\right) = 0./03125 < \left(\frac{8}{10}\right)^5 = 0./32768$$

ب) توان ها برابر شوند . هر عدد (با پایه ی بزرگتر از یک) که پایه ی بزرگتری داشته باشد . بزرگتر است .

$$8^{30} \quad 6^{45} \quad 2^{60}$$

مثال: اعداد تواندار داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$(8^2)^{15} \quad (6^3)^{15} \quad (2^4)^{15}$$

جواب: تمام توانها بر ۱۵ بخش پذیرند (ب م م توانها ۱۵ است) پس می نویسیم :

$$64^{15} \quad 216^{15} \quad 16^{15}$$

اعداد درون پرانتز را به توان رسانده و می نویسیم :

در نهایت با توجه به اینکه توانها برابرند از کوچکترین پایه شروع به مرتب کردن می کنیم .

$$16^{15} < 64^{15} < 216^{15}$$

***نکته:** اعداد تواندار با پایه ی منفی :

با توجه به توان مثبت ، دارای حاصل مثبت و با توان منفی ، دارای حاصل منفی هستند . (به شرطی که پایه درون پرانتز باشد و توان بیرون پرانتز)

مثال: اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$$(-2)^8 = 2^8 = 256 \quad (-1)^{13} = -1^{13} = -1 \quad (-3)^5 = -3^5 = -243 \quad (-2)^8 \quad (-1)^{13} \quad (-3)^5$$

$$(-3)^5 < (-1)^{13} < (-2)^8$$

معادلات توانی

****** در حل اینگونه معادلات باید یکی از دو کار زیر را انجام داد :

- اگر مجهول مساله در توان قرار بگیرد ، برای بدست آوردن مقدار مجهول ؛ ابتدا باید دو طرف تساوی را به صورت یک عدد تواندار بنویسیم که **دو حالت** به وجود می آید .

$$(3^8)^{2x} = 81$$

$$3^{24x} = 3^4$$

- الف) **پایه ها مساوی باشند** که توانها نیز با هم برابر خواهند شد و

$$24x = 4$$

$$x = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

با حل یک معادله ی معمولی به جواب می رسیم .

- ب) **پایه ها مساوی نباشند** که در این حالت باید توانها را برابر جداگانه صفر قرار دهیم .

$$5^{2a-4} = 3^{5b+15}$$

$$2a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

$$5b + 15 = 0 \rightarrow 5b = -15 \rightarrow b = -\frac{15}{5} = -3$$

نمونه سوالات نهایی خرداد ماه ۹۸

۱) حاصل عبارات زیر را به صورت عددی تواندار با توان مثبت بنویسید .

$$(\frac{5}{2})^{-3} \times 125^4 = 5^{-6} \times (5^3)^4 = 5^{-6} \times 5^{12} = 5^6 \quad \text{کرمان:}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \quad \text{اردبیل:}$$

$$\frac{3^4 \times 9^3}{3^{-2}} = \frac{3^4 \times (3^2)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 3^4 \times 3^6 \times 3^2 = 3^{12} \quad \text{قم:}$$

$$\frac{16^{-2} \times 2^{-1}}{8^{-4} \times 4^2} = \frac{(2^4)^{-2} \times 2^{-1}}{(2^3)^{-4} \times (2^2)^2} = \frac{2^{-8} \times 2^{-1}}{2^{-12} \times 2^4} = \frac{2^{-9}}{2^{-8}} = \frac{2^8}{2^9} = \frac{1}{2} \quad \text{ایلام:}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} \times \left(\frac{10}{6}\right)^2 = \quad \text{***** فرزندم با توجه به سوالات حل شده ی بالا ، حالا شما حل کنید .}$$

$$64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$$

$$\frac{15^4 \div 15^{-4}}{3^7 \times 3} =$$

*** فرزندم : با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که

صفحه ی ۶۰ تا صفحه ی ۶۴ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها ، کاردکلاس ها و تمرین را

بنویسید .

شناسایی اعداد اعشاری مثبت ، بزرگتر یا کوچکتر از یک : اگر عدد قبل از اعشار صفر بود، یعنی عدد داده شده کوچکتر از یک است . مثل: $0/03$ و $0/021$ و $0/00076$ و $0/58632$ و .. در همه ی این مثالها، عدد قبل از اعشار صفر است ، پس این اعداد کوچکتر از یک می باشند . اگر عدد قبل از اعشار ، عددی غیر از صفر بود، یعنی عدد داده شده بزرگتر از یک می باشد .

مثل: $255/3$ و $21/3558$ و $5/86$ و .. در این مثالها، عدد قبل از اعشار یک عدد غیر صفر است، پس این اعداد بزرگتر از

یک هستند.

درس دوم : نماد علمی

احمد مشغول نوشتن یک مقاله علمی در مورد کهکشانها بود او می دانست که سرعت نور برابر با 300000000 متر بر ثانیه است. همچنین می دانست که در فضا برای محاسبات سرعت ، از سرعت نور استفاده می کنند . در مساله ی مورد نظر احمد باید مسافت طی شده ی نور در مدت 100 ساعت را باید محاسبه می کرد . او مشغول نوشتن شد و احساس می کرد که تعداد صفر های اعداد بدست آمده خیلی زیاد شدند و هر لحظه باید آنها را بشمارد تا دچار اشتباه نشود . و سرانجام بعد از صرف کلی وقت توانست محاسباتش را به پایان برساند .

او نوشت : ثانیه $360000 = 3600 \times 100 = 100$ ساعت ثانیه $3600 = 60$ دقیقه 1 ساعت

مسافتی که شهاب سنگ در مدت 100 ساعت طی می کند. ثانیه/متر $10800000000 = 360000 \times 300000000$

رضا که تا این لحظه فقط نظاره گر کارهای احمد بود ، گفت چرا این همه صفر نوشتی ؟ و نگاهی به مساله و اعداد انداخت . ناگهان به احمد گفت : بیا از صفر ها راحت شویم . احمد گفت : آخه مگر برای حذف صفر ها مجاز هستیم ؟

رضا گفت : خیر ، اما میدانیم که جدول ارزش مکانی اعداد بر حسب دسته های 10 تایی بنا شده اند، پس میتوان نوشت :

$$\dots \text{ و } 1000 = 10^3 \text{ و } 100 = 10^2 \text{ و } 10 = 10^1$$

لذا می شود اعداد بزرگ با این همه صفر را به صورت عددی اعشاری مثبت با یک رقم صحیح مخالف صفر در توانی از 10 نمایش بدهیم.

احمد گفت این را از کجا یاد گرفتی ؟ رضا گفت : آخه دیروز همین درس را آقا معلم داشت برایمان توضیح می داد .

حالا اعداد مساله را بر اساس مطلب بالا بنویسیم و نوشت :

$$10^5 \times \frac{3}{6} = 360000 = 3600 \times 100 = 100 \text{ ساعت ثانیه } 3600 = \frac{3}{6} \times 10^3 = 3600 = 60 \text{ دقیقه } 1 \text{ ساعت}$$

$$10^8 \times 3 = 300000000 = \text{سرعت نور}$$

$$\text{متر بر ثانیه } 10^{14} \times \frac{1}{0.8} = 1.3 \times 10^8 \times \frac{3}{6} \times 10^5 = 3 \times 10^8 \text{ و در نهایت}$$

احمد گفت: چقدر ضرب ها راحتتر محاسبه شدند . البته از قوانین توان ها هم استفاده شد . حالا راه حلت را توضیح بده تا من هم یاد بگیرم .

رضا گفت که: هر عدد گویا را می توانیم به صورت یک عدد اعشاری مثبت ، با یک رقم صحیح غیر از صفر در توانی از 10 نمایش داد . مثلا 3600 را به صورت $\frac{3}{6}$ نوشت و به تعداد ارقام عدد داده شده غیر از 3 ، توانی برای 10 نوشت .

$$3600 = \frac{3}{6} \times 10^3 \text{ یعنی:}$$

در نماد علمی، کلیه اعداد به شکل: $a \times 10^n$ نوشته می‌شوند. که در آن توان n یک عدد صحیح، و ضریب a یک عدد مثبت حقیقی است

$$a \times 10^n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \text{ و } 1 \leq a < 10$$

میتوان گفت که: نماد علمی روشی است برای نوشتن اعدادی که خیلی بزرگ یا خیلی کوچک هستند و نمی‌توان به سادگی آن‌ها را در نماد دهمی نوشت.

نماد علمی تعدادی ویژگی‌های کاربردی دارد و استفاده از آن در ماشین حساب‌ها و توسط دانشمندان، ریاضی‌دانان، متخصصین سلامت و مهندسان رایج است. همچنین انجام محاسبات ریاضی با نماد علمی راحت تر می باشد.

از جمله کاربردهای نماد علمی می توان در محاسبات فضایی ، محاسبات مهندسی ، پزشکی و ... اشاره کرد که در انتهای درس چند مثال از کاربرد نماد علمی در علوم مختلف را برایتان حل شده است .

برای نوشتن اعداد به صورت نماد علمی دو حالت داریم:

حالت اول: عددی که به ما داده شده، اعشار ندارد.

* * عدد 37532000000 رو با نماد علمی بنویسید.

قدم اول: بعد از اولین رقم از سمت راست، یک اعشار بزنید.

قدم دوم: اکنون بعد از اعشاری که زدید، تعداد ارقام اعداد را بشمارید. تعداد ارقام بعد از ممیز = ۱۱ عدد

قدم سوم: عدد ممیز زده را بدون صفرها بنویسید.

قدم چهارم: عدد 37532000000 را در 10 ضرب کنیم و عدد 11 را که در قدم دوم بدست آمده را به عنوان توان برای 10 بنویسیم.

$$37532000000 = 3.7532 \times 10^{11}$$

حالت دوم: عدد داده شده دارای اعشار باشد.

الف) عدد از یک بزرگتر است؟ بله ☒ خیر

مثال: عدد 0.0000000000003258 را به صورت نماد علمی بنویسید.

قدم اول: تعیین کنید که عدد داده شده بزرگتر از یک یا کوچکتر از یک است. **کوچکتر از یک است**

قدم دوم: از سمت چپ عدد شروع به حرکت کنید، به اولین رقم غیر صفر که رسیدید بعدش یک اعشار بزنیم.

چون عدد داده شده خودش یک ممیز داشت، از ممیز عدد داده شده تا ممیزی که خودمان نوشتیم تعداد ارقام را بشماریم.

0.0000000000003258
دوازده رقم

قدم سوم: در این مرحله عدد $3/258$ را در 10 ضرب کرده و برای توان 10 ، تعداد ارقامی که شماره‌ده ایم را با علامت منفی بنویسیم.

$$0.0000000000003258 = 3/258 \times 10^{-12}$$

ب) عدد بزرگتر از یک

مثال : عدد داده شده را با نماد علمی بنویسید .

$$۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱$$

$$\frac{۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲}{۰۲۱}$$

نه رقم

قدم اول : از سمت چپ بعد از اولین رقم (مخالف صفر) یک ممیز بنویسید .

قدم دوم : تعداد ارقام بین ممیز عدد تا ممیزی که جدید زده ایم را بشمارید .

قدم دوم : عدد $۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱$ را در ۱۰ ضرب کنید . و تعداد ارقام شمارش شده ی بین دو ممیز (۹) را برای توان ۱۰ بنویسید .

$$۲۹۸۲۵۴۳۸۵۲/۰۲۱ = ۲/۹۸۲۵۴۳۸۵۲۰۲۱ \times ۱۰^{-۹}$$

سوالات آزمون نهایی خرداد ۹۸

(۱) شعاع خورشید ۶۹۵۰۰۰ کیلو متر است . این عدد را با نماد علمی بنویسید . (قم ۹۸)

جواب : عدد از یک بزرگتر است . پس از سمت چپ اولین عدد غیر صفر را مشخص کرده و جلوی آن ممیز نوشته و می نویسیم .

$$۶۹۵۰۰۰ = ۶/۹۵ \times ۱۰^۵$$

(۲) فاصله ی مریخ تا زمین ۹۷۱۰۰۰۰۰ کیلومتر است . این عدد را با نماد علمی بنویسید . (تهران ۹۸)

$$۹۷۱۰۰۰۰۰ = ۹/۷۱ \times ۱۰^۷$$

جواب:

(۳) قطر خورشید $۱۰^۹ \times ۱/۴$ متر و قطر زمین حدوداً $۱۰^۷ \times ۱/۳$ متر است . قطر خورشید چند برابر قطر زمین است ؟

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{۱/۴ \times ۱۰^۹}{۱/۳ \times ۱۰^۷} = ۱/۰۸ \times ۱۰^۲ = ۱۰۸$$

جواب :

(۴) نمایش اعداد زیر را با نماد علمی بنویسید .

$$۷۸۴۰۰۰۰۰ = ۷/۸۴ \times ۱۰^۷$$

کرمان :

$$۱۳۹۸/۰۳۰۱ = ۱/۳۹۸۰۳۰۱ \times ۱۰^۳$$

اردبیل :

$$۹۸۰۰۰۰۰۰ = ۹/۸ \times ۱۰^۸$$

سیستان و بلوچستان :

$$۵۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^۵ \times ۱۰^{-۷} = ۵/۳۵۳۵۳ \times ۱۰^{-۲}$$

سمنان :

(۵) نمایش اعشاری اعداد داده شده را بنویسید . (تالیفی)

جواب : چون توان ۱۰ منفی است این عدد از یک کوچکتر است پس : از عدد توان بدون در نظر گرفتن علامت، یک واحد کم می کنیم و بعد از ممیز تا عدد ۲ به تعداد عدد حاصله صفر می نویسیم . ($۷-۱=۶$)

$$۲/۷۵ \times ۱۰^{-۸} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۷۵$$

هشت رقم

جواب : چون توان ۱۰ مثبت است این عدد از یک بزرگتر است پس : به تعداد ارقام بعد از ممیز از توان ۱۰ کم می کنیم و به اندازه ی عدد بدست آمده جلوی عدد ۴ ، صفر می نویسیم . ($۶-۳=۳$)

$$۳/۰۲۴ \times ۱۰^۶ = ۳۰۲۴۰۰۰$$

شش رقم

۶) حاصل عبارات زیر را به دست آورید. (تالیفی)

$$6 \times 10^8 \times \frac{3}{5} \times 10^{-6} = \left(6 \times \frac{3}{5}\right) \times (10^8 \times 10^{-6}) = 22/2 \times 10^2 = 2/22 \times 10 \times 10^2 = 2/22 \times 10^3$$

۷) عبارات درست را با ☒ و عبارات نادرست را با ☐ مشخص کنید. (عبارات نادرست را به صورت درست بنویسید.) (تالیفی)

$$(1) 2/68 \times 10^2 = 268000 \quad (2) 5/8 \times 10^{-6} = 0/000058 \quad (3) 3/17 \times 10^{-4} = 0/000317 \quad (4) 9/8547 \times 10^5 = 985470$$

$$5/8 \times 10^{-6} = 0/0000058 \quad \text{درست (2)} \quad 2/68 \times 10^2 = 2680 \quad \text{نادرست (1)}$$

$$9/8547 \times 10^5 = 985470 \quad \text{درست (4)} \quad 3/17 \times 10^{-4} = 0/000317 \quad \text{نادرست (3)}$$

۸) اعداد داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. (تالیفی)

$$1/5 \times 10^{-3}, \quad 1/7 \times 10^{-2}, \quad 4/35 \times 10^{-2}, \quad 2/8 \times 10^{-2}$$

ابتدا با توجه به توانهای عدد ۱۰ به مقایسه می پردازیم، در صورتی که توانها برابر بودند، سراغ قسمت اعشاری رفته و آنها را با هم مقایسه می کنیم. با توجه به توانهای عدد ۱۰ داریم: $-3 < -2$ ، چون سه عدد دارای توان -2 هستند اکنون باید اعداد اعشاری را مقایسه کنیم:

$$1/7 < 2/8 < 4/35$$

$$1/5 \times 10^{-3} < 1/7 \times 10^{-2} < 2/8 \times 10^{-2} < 4/35 \times 10^{-2} \quad \text{و در نهایت داریم:}$$

***فرزندم: حالا با توجه به توضیحات و نمونه سوالات حل شده انتظار دارم که صفحه ی ۶۵ تا صفحه ی ۶۷ از کتاب درسی را ابتدا با دقت مطالعه کرده و سپس پاسخ فعالیت ها، کاردرکلاس ها و تمرین را بنویسید.

موفق باشید و سربلند.

محسن رضائی دبیر ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) شهرستان اهواز ناحیه ی ۳

جزوه فصل چهارم

پایه نهم

موضوع : ضرب و تقسیم رادیکال ها

گردآورنده: آقای اعتمادنژاد

شهریور ۹۹





موضوع: جمع و تفریق رادیکال ها

ضرب و تقسیم رادیکال ها

نکته ۱:

همانطور که در سال گذشته خواندید برای ضرب و تقسیم رادیکال ها باید فرجه ها مثل هم باشند.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad (a \text{ و } b \text{ مثبت (اعداد حسابی)})$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال: ضرب و تقسیم کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ب) } \sqrt{150} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{150}{5}} = \sqrt{30}$$

نکته:

گاهی اوقات پس از ضرب و تقسیم می توان جذر گرفت.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{27} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

نکته ۲:

همین مطلب (نکته ۱) برای فرجه ۳ نیز استفاده می شود.

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \quad a \text{ و } b \text{ عدد حقیقی}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad (b \neq 0)$$

مثال:

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{128} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

نکته ۳:

اما برای جمع و تفریق تساوی‌های زیر همیشه برقرار نیستند.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \neq \sqrt[3]{a-b}$$

سوال: آیا تساوی زیر درست است؟ چرا؟

$$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{25}$$

حل: خیر، زیرا:

$$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{25} \Rightarrow \underbrace{2/2 + 4/4}_{6/8} = 5 \Rightarrow 6/8 \neq 5$$

سوال ۱: حاصل هر عبارت را بدست آورید؟

الف) $-5\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} = (-5 \times 2)(\sqrt{3} \times \sqrt{5}) = -10\sqrt{15}$

ب) $7\sqrt[3]{-2} \times 9\sqrt[3]{4} = (7 \times 9)(\sqrt[3]{-2 \times 4}) = 63\sqrt[3]{-8} = 63 \times (-2) = -126$

پ) $15\sqrt{50} \div 3\sqrt{2} = (15 \div 3)\sqrt{\frac{50}{2}} = 5\sqrt{25} = 5 \times 5 = 25$

ت) $42\sqrt[3]{250} \div 14\sqrt[3]{2} = (42 \div 14)\sqrt[3]{\frac{250}{2}} = 3\sqrt[3]{125} = 3 \times 5 = 15$

سوال ۲: آیا تساوی $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$ درست است؟ ☒ بلی ☐ خیر

سوال ۳: اگر مساحت یک مکعب $24a^2$ باشد حجم آن بر حسب a چیست؟

الف) $8a^3$ ☒ ب) $8a^2$ ☐ پ) $64a^3$ ☐ ت) $16a^3$ ☐

حل: $24a^2 \div 6 = 4a^2 \rightarrow \sqrt{4a^2} = 2a \rightarrow 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3$

۹) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ گیلان)

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25} = (2 \times 4) \sqrt[3]{5 \times 25} = 8 \sqrt[3]{125} = 8 \times 5 = 40$$

۲) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (خ ۹۶ یزد)

$$\frac{\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{54 \times 20}{5}} = \sqrt[3]{54 \times 4} = \sqrt[3]{216} = 6$$



جمع و تفریق رادیکال‌ها:

نکته ۱: ساده کردن یک عبارت رادیکالی را در سال گذشته خواندید. مثال:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

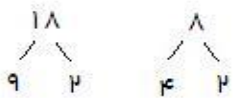
نکته ۲: برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی در صورتی که رادیکال‌ها مثل هم باشند از فاکتورگیری کمک می‌گیریم:

الف) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (5 + 2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

ب) $18\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (18 - 2)\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$

گاهی اوقات برای جمع و تفریق عبارات رادیکالی باید ابتدا تجزیه کنیم:

$$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$



نکته ۴: اگر قبل از رادیکال عددی داشتیم بعد از جذر گرفتن ضرب می‌کنیم:

$$5\sqrt{27} - 2\sqrt{12} = 5\sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{4 \times 3} = 5 \times 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

نکته: برای جمع و تفریق رادیکال‌ها

(۱) قسمت رادیکالی دو عدد بعد از ساده کردن یکسان باشند.

(۲) فرجه رادیکال‌ها باید مثل هم باشند. مثال:

$$2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} \rightarrow \text{نمی‌توان جمع کرد}$$

تمرین:

(۱) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\begin{aligned} \sqrt{90} + \sqrt{160} - \sqrt{40} &= \sqrt{9 \times 10} + \sqrt{16 \times 10} - \sqrt{4 \times 10} \\ &= 3\sqrt{10} + 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = (3 + 4 - 2)\sqrt{10} = 5\sqrt{10} \end{aligned}$$

(۲) حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\begin{aligned} -2\sqrt{54} + 5\sqrt{16} - 2\sqrt{27 \times 2} + 5\sqrt{8 \times 2} &= -2 \times 3\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} \\ &= -6\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

(۳) الف) مساحت مربعی به ضلع $5\sqrt{2}$ را بدست آورید.

یک ضلع ضربدر خودش = مساحت مربع

$$5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = (5 \times 5)(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 25 \times \sqrt{4} = 25 \times 2 = 50$$

ب) محیط مربع بالا را محاسبه کنید.

۴) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید.

$$\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{324 + 1 + 36}{81}} = \sqrt{\frac{361}{81}} = \frac{19}{9}$$

سوالات امتحان نهایی فصل ۴

۱) عبارت زیر را ساده کنید. (خ ۹۶ کردستان)

$$7\sqrt{20} - \sqrt{45} = 7\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} = 7 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$$

۲) حاصل را به ساده ترین صورت بدست آورید. (تهران خ ۹۶)

$$3\sqrt{45} - \sqrt{5} = 3\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{5} = 3 \times 3\sqrt{5} - 1\sqrt{5} \\ = (9 - 1)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

۳) حاصل عبارت مقابل را ساده کنید.

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = \sqrt{36 \times 2} - \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ = (6 - 4 + 1)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



گویا کردن مخرج کسره‌های رادیکالی

محاسبه کدام یک از عبارت‌های زیر راحت‌تر است؟

$$\text{الف)} \frac{2}{5} + \frac{3}{7}$$

$$\text{ب)} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{7}}$$

نکته: برای گویا کردن مخرج

الف) وقتی فرجه رادیکال ۲ باشد کافی است صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج ضرب کنیم.

مثال: مخرج عبارت زیر را گویا کنید.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5 \times 5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

ب) اگر فرجه رادیکال ۳ باشد گویا کردن مخرج دو حالت دارد:

۱) عدد زیر رادیکال توان یک داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال با توان دو ضرب می‌کنیم.

$$\frac{-17}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-17 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \times 2^2}} = \frac{-17\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-17\sqrt[3]{4}}{2}$$

۲) عدد زیر رادیکال توان دو داشته باشد که در این حالت صورت و مخرج کسر را در رادیکال مخرج با توان یک ضرب می‌کنیم.

$$\frac{4}{\sqrt[2]{7^2}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{7^2 \times 7}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{\sqrt[2]{343}} = \frac{4 \times \sqrt[2]{7}}{7}$$

(۱) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{5}{\sqrt[2]{a}} = \frac{-5 \times \sqrt{a}}{\sqrt[2]{a} \times \sqrt{a}} = \frac{-5\sqrt{a}}{2a}$$

(۲) برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}$ باید صورت و مخرج را در ضرب شوند.

الف) $\sqrt{x^2}$ (ب) x (پ) $\sqrt{x}$ (ت) $\sqrt[2]{x}$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{x}} = \frac{1 \times \sqrt{x^2}}{\sqrt[2]{x} \times \sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{\sqrt{x^2}}{2x}$$

حل:

(۳) ساده شده عبارت $\frac{15}{\sqrt[2]{5}}$ پس از گویا کردن مخرج کدام است؟

الف) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (پ) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$ (ت) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

سوالات امتحان نهایی

(۱) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ مازندران)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[2]{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt[2]{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2 \times 5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

(۲) مخرج کسر را گویا کنید. (خ ۹۶ کهکیلویه و بویراحمد)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \times \sqrt[2]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[2]{2^2}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[2]{4}}{2}$$

(۳) مخرج کسر را گویا کنید. (مولف)

$$\frac{-5}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{4a} \times \sqrt[3]{2a^2}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{2^3 a^3}} = \frac{-5 \times \sqrt[3]{2a^2}}{2a}$$

بسمه تعالی

درسنامه، نکات و تمرینات فصل پنجم ریاضی پایه نهم. گرد آورنده: سیده مریم علوی فر، سیده سمیه علوی فر

درس اول: عبارت های جبری و مفهوم اتحاد

یک جمله ای: هر عبارتی که به صورت ضرب یک عدد حقیقی و یک یا چند متغیر با توان های صحیح نامنفی باشد، یک جمله ای نامیده می شود.

عبارت های زیر همگی یک جمله ای هستند.

$$\pi, -\frac{2}{5}x^3y^2, -\sqrt{3}n^3m^5, -9, -12xy^4$$

$$\sqrt{3}, 7, -\frac{1}{3}$$

دقت کنید که یک عدد نیز به تنهایی، یک جمله ای محسوب می شود. **مانند:**

عبارت هایی که یک جمله ای نمی باشند:

- (۱) اگر متغیر دارای توان منفی باشد. **مثال:**
- (۲) اگر متغیر زیر رادیکال باشد (هر فرجه ای داشته باشد). **مثال:**
- (۳) اگر متغیر در قدر مطلق باشد. **مثال:**
- (۴) اگر متغیر در مخرج کسر باشد. **مثال:**
- (۵) اگر متغیر در توان باشد. **مثال:**
- (۶) اگر دو جمله ای باشد، یعنی بین جملات جمع یا تفریق باشد. **مثال:**

یک جمله ای متشابه:

به دو یا چند یک جمله ای که عبارت حرفی یکسان (حرف ها و توان آن ها مثل هم باشند) یک جمله ای متشابه گویند.

مثال:

$$(-7a^2b, 3ba^2)$$

عبارت $-7a^2b$ و $3ba^2$ با هم متشابه هستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی « a^2b » یکسان می باشد.

ولی $6x^2y^3$ و $6x^3y^2$ با هم متشابه نیستند زیرا قسمت حرفی آن ها یعنی « x^2y^3 » و « x^3y^2 » یکسان نمی باشد.

نکته: در یک عبارت جبری فقط جمله های متشابه را می توان جمع جبری کرد.

تذکر: در جمع جمله های متشابه فقط ضرایب عددی با هم جمع می شوند و متغیرها هیچ تغییری نمی کنند.

دقت کنید: یک جمله ای های غیرمتشابه را نمی توان با هم جمع کرد.

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (x^2)^3 y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

چون یک جمله ای توان دار می باشد ضریب عددی یعنی « $\frac{2}{3}$ » و متغیرها را به توان می رسانیم و حاصل را به دست می آوریم.

$$\text{ب) } (2x^2y)(3x^2y^3) + xy^3(-5x^3y) = (2 \times 3)(x^2 \times x^2)(y \times y^3) + (-5)(x \times x^3)(y^3 \times y)$$

$$= 6x^4y^4 - 5x^4y^4 = x^4y^4$$

درجه یک جمله ای: در یک جمله ای $-7xy^2z^3$ ، درجه نسبت به x برابر ۱، درجه نسبت به y برابر ۲، درجه نسبت به z برابر ۳

است؛ درجه نسبت به متغیر x و y برابر $3 = 2 + 1$ و نسبت به z برابر $5 = 3 + 2$ و نسبت به x و z برابر $4 = 3 + 1$

تعریف می کنیم.

درجه چندجمله ای: درجه ی یک چند جمله ای نسبت به یک متغیر برابر است با بزرگترین توان که آن متغیر در بین جمله ها دارد.

مثال: درجه چند جمله ای $7a - 4a^5 + 15$ نسبت به متغیر a برابر ۵ می باشد.

درجه یک چندجمله ای نسبت به دو یا چند متغیر برابر است با جمع توان های آن متغیرها (توان های متغیر های یک جمله ای ها را در یک عبارت چند جمله ای جمع می کنیم حاصل هر کدام بیشتر شد آن عدد درجه ی آن چند جمله ای را نسبت به آن متغیرها نشان می دهد).

مثال: درجه ی یک جمله ای $-9x^2y^5z$ نسبت به x برابر ۲ است و نسبت به y برابر ۵ است و نسبت به z برابر ۱ و نسبت به t برابر صفحه است. درجه نسبت به y و x برابر ۷ می باشد. (جمع درجه ی x و y)

چند جمله های استاندارد:

هرگاه در یک چندجمله ای جمله ها را نسبت به توان های یک متغیر نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم به آن چند جمله ای، چند جمله ای استاندارد می گوییم.

تذکر: برای پیدا کردن درجه یک چند جمله ای نسبت به یک یا چند متغیر بهتر است ابتدا آن چند جمله ای را استاندارد کنیم سپس درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده به دست آوریم.

مثال: چندجمله ای زیر را نسبت به a استاندارد کنید. سپس درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

پاسخ: توان ها را نسبت به متغیر a از بزرگ به کوچک مرتب می کنیم.

درجه نسبت به a : ۳ (بزرگترین توان a را می نویسیم)

درجه نسبت به b : ۳ (بزرگترین توان b در بین جمله ها را می نویسیم)

درجه نسبت به a و b : $3 + 2 = 5$ (توان متغیرها را در یک جمله ای ها جمع می کنیم و حاصل هر کدام بیشتر شد درجه ی آن چند جمله ای را نسبت به آن متغیر نشان می دهیم)

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده و سپس آن را نسبت به توان های نزولی x مرتب و همچنین درجه ی آن را نسبت به متغیرهای خواسته شده بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} & -5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)] \\ & = -5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - 3a^2 + 8ax] \\ & = -5a^2 - 3ax + x^2 - 4a^2 - 5ax + 3a^2 - 8ax \\ & = -6a^2 - 15ax + x^2 \\ & = x^2 - 15ax - 6a^2 \end{aligned}$$

درجه نسبت به x : ۲ ، درجه نسبت به a : ۲ ، درجه نسبت به x و a : $2 + 1 = 3$

در ابتدا طبق رعایت اولویت ها عبارت جبری را ساده می کنیم، عبارت داخل پرانتز را قرینه می کنیم و بقیه عبارت را می نویسیم سپس عبارت داخل کروشه را قرینه می کنیم و می نویسیم، آنگاه عبارت جبری را بر اساس جملات متشابه ساده می کنیم و حاصل را به دست می آوریم، در نتیجه با توجه به توان نزولی x ، عبارت را مرتب می کنیم.

اتحاد: یک تساوی جبری که به ازای همه ی مقادیر درست باشد، را اتحاد می نامیم.

مثال: عبارت $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ اتحاد است، زیرا به ازای تمام مقادیرهایی که به جای متغیرهایش قرار می دهیم، تساوی برقرار است.

x	$(x+1)^2$	$x^2 + 2x + 1$
-2	$(-2+1)^2 = (-1)^2 = 1$	$(-2)^2 + 2(-2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$
0	$(0+1)^2 = (1)^2 = 1$	$(0)^2 + 2(0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$
5	$(5+1)^2 = (6)^2 = 36$	$(5)^2 + 2(5) + 1 = 25 + 10 + 1 = 36$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{9}{4} + 3 + 1 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

در ستون اول مقدار x داده شده، (-2) می باشد، در عبارت جبری ستون دوم جایگزین می کنیم، ابتدا حاصل درون پرانتز را به دست می آوریم و آن را به توان می رسانیم، در ستون سوم مقدار x را در عبارت جایگزین می کنیم طبق رعایت اولویت ها حاصل را به دست می آوریم بقیه ی مقادیر داده شده ی x را به همین طریق جایگزین می کنیم چون به ازای تمام مقادیر هر دو ستون با هم برابر شدند پس عبارت فوق، اتحاد است.

سؤال: آیا $x + 1 = 3$ اتحاد است؟ چرا؟ به ازای چند مقدار مختلف مانند $x = 0$ ، $x = -3$ ، $x = 2$ و ... عبارت را آزمایش می کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 1 \Rightarrow 1 \neq 3$$

$$x = -3 \Rightarrow -3 + 1 \Rightarrow -2 \neq 3$$

$$x = 2 \Rightarrow -2 + 1 = 3 \Rightarrow 3 = 3$$

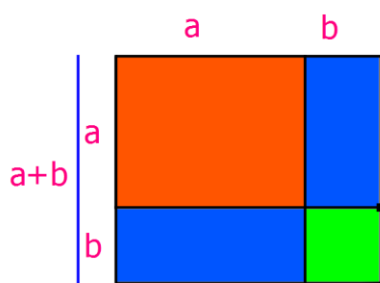
خیر، زیرا این عبارت فقط به ازای 2 درست است پس اتحاد نیست این عبارت یک معادله می باشد.

سؤال: تفاوت اتحاد دو معادله چیست؟ اتحاد به ازای تمام مقادیر یکه به جای متغیرهایش انجام می دهیم، درست است، اما معادله به ازای بعضی مقادیر مشخص درست می باشد.

اتحاد مربع دو جمله ای:

اولین اتحادی که لازم است آن را بیاموزید اتحاد مربع دو جمله ای است. مربع دو جمله ای می تواند مربوط به حالت جمع دو جمله یا تفاضل دو جمله باشد.

در شکل زیر اثبات هندسی اتحاد مربع مجموع دو جمله ای را بنویسید.



مساحت بزرگترین مربع شکل فوق به ضلع $a + b$ برابر است با مساحت دو مربع و دو مستطیل درون آن.

$$(a+b)^2 = S_1 + 2S_2 + S_3 = \text{مساحت کل شکل}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اتحاد مربع دوجمله ای:

(الف) جبری:

(ب) کلامی:

مربع جمله دوم + 2 برابر حاصلضرب جمله ها + مربع جمله اول $\left(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول} \right)^2$

دقت کنید: برای حالتی که بین دو جمله علامت منفی وجود داشته باشد با مربع تفاضل دو جمله ای مواجه هستیم.

برای محاسبه طرف دوم اتحاد به صورت زیر عمل می کنیم:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: حاصل عبارت های جبری را به کمک اتحاد به دست آورید.

پاسخ: مربع جمله ی اول بعلاوه دو برابر حاصلضرب جمله ها، بعلاوه مربع جمله دوم، سپس حاصل را به دست می آوریم.

الف) $(2a + 5)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5) + 5^2 = 4a^2 + 20a + 25$

مربع جمله ی اول $= (2a)^2 = 4a^2 \Rightarrow$ جمله اول $= 2a$

دو برابر حاصلضرب جمله ها $= 2(2a)(5) = 20a$

مربع جمله دوم $= 5^2 = 25 \Rightarrow$ جمله دوم $= 5$

پاسخ: مربع جمله ی اول منهای دو برابر حاصلضرب جمله ها، بعلاوه مربع جمله دوم، سپس حاصل را به دست می آوریم.

ب) $(a^3 - bc)^2 = (a^3)^2 - 2a^3(-bc) + (-bc)^2 = a^6 - 2a^3bc + b^2c^2$

مربع جمله ی اول $= (a^3)^2 = a^6 \Rightarrow$ جمله اول $= a^3$

دو برابر حاصلضرب جمله ها $= 2a^3(-bc) = -2a^3bc$

مربع جمله دوم $= (-bc)^2 = b^2c^2 \Rightarrow$ جمله دوم $= bc$

ج) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2(a)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$

توجه: به هر یک از تساوی های بالا، اتحاد مربع دو جمله ای می گوییم. تساوی قسمت «الف» را اثبات می کنیم.

$$(2a + 5)^2 = (2a + 5)(2a + 5) = 2a(2a) + 2a(5) + 5(2a) + 5(5) = 4a^2 + 10a + 10a + 25 = 4a^2 + 20a + 25$$

تجزیه ی یک عبارت جبری:

تبدیل یک عبارت جبری به ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر با درجه کمتر را تجزیه گوییم.

روش های تجزیه:

۱) فاکتورگیری ۲) استفاده از اتحادها ۳) ترکیبی (فاکتورگیری همراه با اتحاد)

فاکتورگیری: برای تجزیه ی یک عبارت با استفاده از فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱) (ب.ب.م) ضرایب را تعیین می کنیم.

۲) حروف مشترک با توان کمتر را انتخاب می کنیم.

۳) (ب.ب.م) و حروف مشترک را به عنوان فاکتور می گیریم.

۴) تمام جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و جواب را داخل پرانتز می نویسیم.

مثال: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $ab + ac = a(b + c)$

پاسخ: حروف مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور انتخاب می کنیم تمام جملات را بر عامل فاکتور یعنی «a» تقسیم می کنیم

و جواب را داخل پرانتز می نویسیم.

ب) $15m^2n - 20mn^2 = 5xy(3x - 4y)$

ج) $7x^2y^3 + 21x^3y - 49xy = 7xy(xy^2 + 3x^2 - 7)$

تجزیه به کمک اتحادها:

برای تجزیه ی یک عبارت سه جمله ای به کمک اتحاد مربع دو جمله ای آن عبارت سه جمله ای باید دارای دو ویژگی باشد:

۱) جمله های اول و سوم جذر داشته باشند.

۲) جمله ی وسط از ضرب عدد ۲ در جذر دو جمله ی دیگر به دست آمده باشد.

در این صورت از جمله های اول و سوم جذر گرفته و چنانچه جمله ی وسط جمع باشد بین آن ها جمع و اگر تفریق بوده بین آن ها علامت منها قرار داده و به توان ۲ می نویسیم و در پایان آن را به صورت ضرب دو عبارت دو جمله ای می نویسیم.
مثال: عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای تجزیه کنید.

الف) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

ب) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$

ج) $9x^2 - 12x^2y + 4y^2 = (3x^2 - 2y)^2 = (3x^2 - 2y)(3x^2 - 2y)$

تجزیه ی ترکیبی (فاکتورگیری و اتحاد):

در بعضی از عبارت ها ابتدا باید با استفاده از فاکتورگیری از عوامل مشترک فاکتورگیری می کنیم و سپس با استفاده از اتحاد عبارت به دست آمده را تجزیه می کنیم.

الف) $a^3 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a - 1)^2 = a(a - 1)(a - 1)$

ابتدا با استفاده از فاکتورگیری از عامل مشترک یعنی «a» فاکتور می گیریم و سپس با استفاده از اتحاد عبارت را تجزیه می کنیم.

ب) $25m^4 + 30m^3 + 9m^2 = m^2(25m^2 + 30m + 9) = m^2(5m + 3)^2 = m^2(5m + 3)(5m + 3)$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

کلامی:

$$(سومی + دومی + اولی)^2 = (اولی)^2 + (دومی)^2 + (سومی)^2 + 2(اولی)(دومی) + 2(اولی)(سومی) + 2(دومی)(سومی)$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای به دست آورید.

$$(2a - 3b - c)^2 = (2a)^2 + (-3b)^2 + (-c)^2 + 2(2a)(-3b) + 2(2a)(-c) + 2(-3b)(-c) \\ = 4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab - 4ac + 6bc$$

اتحاد مزدوج:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

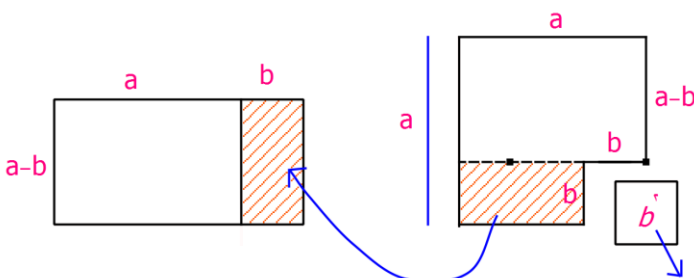
الف) جبری: برای هر دو a و b داریم:

یعنی: حاصلضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله برابر است با مربع جمله ی اول منهای مربع جمله ی دوم.

$$(جمله دوم + جمله اول)(جمله دوم - جمله اول) = (جمله اول)^2 - (جمله دوم)^2$$

ب) کلامی:

پ) اثبات هندسی:



مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد به دست آرید.

الف) $(3x - 4)(3x + 4) = (3x)^2 - (4)^2 = 9x^2 - 16$

ب) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = (x)^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$

پ) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) = (2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2 = 4 \times 3 - 9 \times 5 = 12 - 45 = -33$

ت) $(a - 2b + 5)(a + 2b - 5) = [a - (2b - 5)][a + (2b - 5)] = a^2 - (2b - 5)^2$
 $= a^2 - (4b^2 - 20b + 25) = a^2 - 4b^2 + 20b - 25$

نوشتن سمت چپ اتحاد مزدوج از روی جواب آن:

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}y^2$$

برای به دست آوردن سمت چپ جذر جمله ی اول سمت راست یعنی $\frac{1}{4}$ و جمله ی دوم سمت راست یعنی $\frac{4}{9}$ را می گیریم و درون پرانتز قرار می دهیم، جمله ی اول هر دو پرانتز و جمله ی دوم هر دو پرانتز هم هستند فقط با علامت های + و - می باشند.

تجزیه ی یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

در حالت کلی:

تذکر: عبارتی را می توان به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرد که دارای سه ویژگی باشد:

۱- دو جمله ای باشد. ۲- هر دو جمله مربع کامل باشند. ۳- بین دو جمله علامت منها باشد.

در این صورت برای تجزیه از دو جمله ی داده شده جذر گرفته و یک بار آن ها را جمع کرده و بار دیگر تفریق کرده و آن ها را به صورت ضرب دو عبارت می نویسیم.

مثال: به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

جذر x^2 برابر x و جذر ۹ برابر ۳ می شود سپس آن ها را به صورت دو عبارت یک بار جمع و یک بار تفریق کرده و می نویسیم.

ب) $16ax^2 - a = a(16x^2 - 1) = a(4x - 1)(4x + 1)$

شرط ۲ برقرار است، از روش فاکتورگیری استفاده می کنیم سپس عبارت درون پرانتز را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می کنیم.

پ) $(2x + 1)^2 - y^2 = [(2x + 1) + y][(2x + 1) - y] = (2x + 1 - y)(2x + 1 + y)$

نکته: استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

مثال: به کمک اتحادها حاصل عبارت را به دست آورید.

الف) $497 \times 503 = (500 - 3)(500 + 3) = (500)^2 - (3)^2 = 250000 - 9$

می توانیم این دو عدد را در هم ضرب کنیم، به جواب برسیم اما ممکنه اعداد خیلی بزرگ به دست بیاید، می توانیم به کمک اتحاد مزدوج به جواب برسیم و به جای ۴۹۷ و ۵۰۳ بنویسیم:

$$497 = 500 - 3 \quad \text{و} \quad 503 = 500 + 3$$

اگر بخواهیم عدد (۱۰۰۱) را در خودش ضرب کنیم عددی به دست می آید اما از اتحادها راحت تر به جواب می رسیم، می

نویسیم: $(1001) = 1000 + 1$

حال اگر به توان ۲ برسانیم چطور می شود:

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(1) + 1^2$$

به کمک اتحاد مربع دو جمله ای به جواب برسیم.

اتحاد جمله مشترک:

الف) جبری: برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

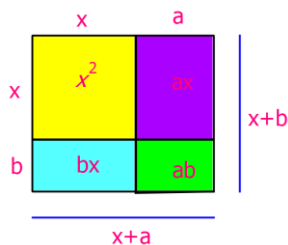
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ب) کلامی:

(جمله غیر مشترک دوم + جمله مشترک) (جمله غیر مشترک اول + جمله مشترک)

حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک + (جمله مشترک) (مجموع دو جمله غیر مشترک) + (جمله مشترک)^۲ =

(پ) روش هندسی: در شکل زیر اثبات هندسی اتحاد جمله مشترک را می بینید.



مستطیل بزرگ $S = (x + a)(x + b)$

مستطیل بزرگ $S = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

$$\Rightarrow (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال: حاصل هر عبارت را به کمک اتحاد به دست آورید.

با توجه به رابطه ی کلامی در قسمت «ب» مثال ها را حل می کنیم.

الف) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 3 \times 5 = x^2 + 8x + 15$

ب) $(3a - 2)(3a - 7) = (3a)^2 + (-2 + (-7))(3a) + (-2) \times (-7) = 9a^2 - 27a + 14$

پ) $(2a - 4)(2a + 8) = (2a)^2 + (-4 + 8)(2a) + (-4) \times (8) = 4a^2 + 8a - 32$

تذکر: حاصل اتحاد جمله مشترک مانند اتحاد مربع دو جمله ای دارای ۳ جمله است، با این تفاوت که در اتحاد جمله مشترک جمله ی سوم جذر ندارد.

تجزیه اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

تذکر: عباراتی را می توان به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کرد که دارای سه ویژگی باشد:

۱) سه جمله ای باشد.

۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق داشته باشد.

۳) ضریب x ، حاصل جمع و عدد آخر، حاصلضرب دو عدد را نشان می دهد.

بنابراین برای تجزیه اتحاد جمله مشترک دو پранتز باز کرده و در هر دو پранتز ابتدا جذر جمله مشترک را نوشته، سپس با توجه به علامت دو جمله غیرمشترک، علامت مناسب بعد از جمله مشترک قرار داده و دو عدد غیرمشترک را پیدا می کنیم.

مثال: به کمک اتحاد جمله مشترک تجزی کنید.

الف) $x^2 + 7x + 12 = (x + 5)(x + 7)$

ب) $y^2 + 1y - 6 = (y + 3)(y - 2)$

پ) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$

درس سوم: نابرابری ها و نامعادله ها

نابرابری:

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند سه حالت داریم: « a کوچکتر از b »، « a بزرگتر از b » یا « a مساوی b » که فقط یکی از این سه حالت ها را خواهیم داشت.

نکته: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند $P > 0$ وجود دارد به طوری که $a = b + P$

مثال: برای تساوی های زیر یک نابرابری بنویسید.

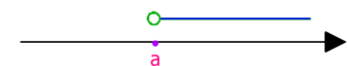
الف) $a - 2 = b + 3$

$$a = b + 3 + 2 \Rightarrow a = b + 5 \Rightarrow a > b$$

ب) $2m = 3n$

$$m = \frac{3}{2}n \Rightarrow m > n$$

برای نمایش نابرابری ها روی محور طبق شکل های زیر عمل می کنیم.



$$x > a$$

عددهای بزرگتر از a



$$x < a$$

عددهای کوچکتر از a



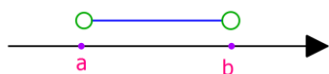
$$x \geq a$$

عددهای بزرگتر یا مساوی a



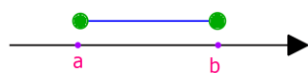
$$x \leq a$$

عددهای کوچکتر یا مساوی a



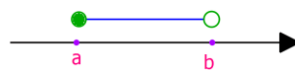
$$a < x < b$$

عددهای بزرگتر از a و کوچکتر از b



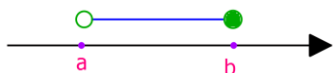
$$a \leq x \leq b$$

عددهای بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر یا مساوی b



$$a \leq x < b$$

عددهای بزرگتر یا مساوی a و کوچکتر از b



$$a < x \leq b$$

عددهای بزرگتر از a و کوچکتر یا مساوی b

هر نامساوی یکی از نمادهای زیر را دارد:

کوچکتر یا مساوی ($\leq$)

نماد کوچکتر ($<$)

بزرگتر یا مساوی ($\geq$)

بزرگتر ($>$)

مخالف ($\neq$)

خواص نابرابری ها:

مثال: به دو طرف نابرابری های زیر عددهای دلخواه را اضافه کنید آیا نابرابری برقرار است؟

$$2 < 10 \Rightarrow 2 + 4 < 10 + 4 \Rightarrow 6 < 14$$

$$9 > -3 \Rightarrow 9 - 7 > -3 - 7 \Rightarrow 2 > -10$$

ا) اگر دو طرف یک نامساوی را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری زیر برقرار است:

$$x > a \Rightarrow a + c > b + c$$

مثال: به دو طرف نابرابری های زیر عددهای دلخواه را ضرب کنید، آیا نابرابری ها تغییر می کنند؟

$$-3 < 7, 4 > 0 \Rightarrow -3 \times 4 < 7 \times 4 \Rightarrow -12 < 28$$

$$\frac{2}{5} > \frac{1}{10}, 10 > 0 \Rightarrow \frac{2}{5} \times 10 > \frac{1}{10} \times 10 \Rightarrow 4 > 1$$

۲) اگر دو طرف یک نامساوی را در عدد مثبتی مانند $c > 0$ ضرب یا تقسیم کنیم، نابرابری زیر برقرار است:

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

مثال: اگر دو طرف نابرابری های زیر را در عدد منفی دلخواه ضرب یا تقسیم کنیم آیا جهت نابرابری تغییر می کند؟

$$3 > -8, -3 < 0 \Rightarrow 2 \times (-3) < -8 \times (-3) \Rightarrow -6 < 24$$

$$-7 < -2, -4 < 0 \Rightarrow -7 \times (-4) < -2 \times (-4) \Rightarrow 28 > 8$$

۳) اگر دو طرف یک نامساوی را در عدد منفی مانند $c < 0$ ضرب یا تقسیم کنیم، نابرابری تغییر می کند.

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$2x + 1 > 7$$

نامعادله: اگر نامساوی دارای متغیر باشد به آن نامعادله می گوئیم. مانند:

مجموعه جواب نامعادله: به مجموعه مقادیر (عددهایی) که به ازای آن نامعادله به یک نابرابر درست، تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله می گوئیم و این مجموعه جواب را با حروف D نمایش می دهیم.

مجموعه جواب یک نامعادله را روی محور اعداد حقیقی می توان نشان داد.

حل نامعادله: می توان مانند حل معادله عمل کرد با این تفاوت در مرحله ی پایانی در صورتی که ضریب مجهول عددی منفی باشد هنگام تقسیم طرفین بر عدد منفی، جهت نامعادله تغییر می کند.

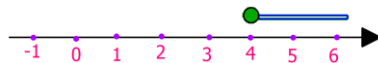
مثال: مجموعه جواب نامعادله زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$\text{الف)} \quad 2x + 7 \geq 15$$

پاسخ: مانند حل معادله عمل می کنیم ابتدا نامعادله را مرتب می کنیم و معلوم ها در یک طرف نامساوی و مجهول ها در طرف دیگر قرار می دهیم و سپس ساده می کنیم و مقدار مجهول را به دست می آوریم.

$$2x \geq 15 - 7 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$$

برای به دست آوردن مجموعه جواب (دامنه) می نویسیم « x » (متغیر) عضو « R » (اعداد حقیقی) به طوری که $x \geq 4$ (مقدار مجهولی که از حل نامعادله به دست می آوریم)



$$D = \{x \in R \mid x \geq 4\}$$

$$\text{ب)} \quad 2(x - 3) + 5 < 5 - x \Rightarrow 2x - 6 + 5 < 5 - x \Rightarrow 2x + x < 5 + 6 - 5 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$$



$$D = \{x \in R \mid x < 2\}$$

حل نامعادلات کسری:

برای کل نامعادله کوچکترین مخرج مشترک کسرها را در نظر می گیریم در معادلات به مخرج کسرها پس از مساوی شدن احتیاجی نداریم و مخرج ها را حذف می کنیم سپس نامعادله را طبق مراحل قبل حل می کنیم.

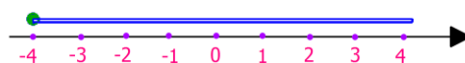
مثال: مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$\text{الف)} \quad -2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$$

$$\frac{-2 \times 12}{1 \times 12} - \frac{q \times 3}{4 \times 3} \leq \frac{(1+q) \times 4}{3 \times 4}$$

$$\Rightarrow -24 \leq 28 - 3q \Rightarrow -3q \leq 52 \Rightarrow q \geq -\frac{52}{3}$$

$$\Rightarrow -24 - 3q \leq 4 + 4q \Rightarrow -3q - 4q \leq 4 + 24$$



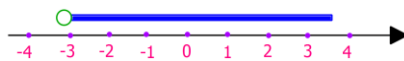
$$D = \{q \in R \mid q \geq -\frac{52}{3}\}$$

ابتدا مخرج مشترک ۱۲ را در نظر می گیریم و مخرج ها را حذف می کنیم و طبق مراحل نامعادله حل می کنیم برای به دست آوردن مقدار مجهول چون طرفین نامساوی را بر عدد منفی تقسیم می کنیم جهت نامساوی تغییر می کند.

$$\text{ب) } \frac{x+1}{2} + 7 > -2x$$

$$\frac{x+1}{2} + \frac{7 \times 2}{1 \times 2} > \frac{-2x \times 2}{1 \times 2} \Rightarrow x + 1 + 14 > -4x \Rightarrow x + 4x > -15 \Rightarrow 5x > -15 \Rightarrow x > -3$$

$$D = \{x \in R \mid x > -3\}$$



نکته: علامت $\leq$ هرگز نباید به صورت کوچکتر و مساوی خوانده شود زیرا نمی توان تصور کرد که عدد x هم کوچکتر از y باشد و هم با آن مساوی باشد. بنابراین هنگام خواندن این نامساوی دقت کنید تا عبارت صحیح خوانده شود. این مورد برای علامت $\geq$ نیز صادق است و هرگز نباید به صورت بزرگتر و مساوی خوانده شود، بلکه باید به صورت بزرگتر یا مساوی گفته شود.

نکته: در مسائل مربوط به نابرابری ها به جای کلمه ی حداکثر از علامت $\leq$ و به جای کلمه حداقل از علامت $\geq$ استفاده می کنیم.

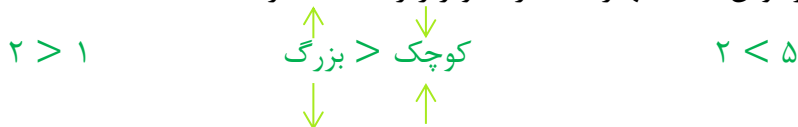
مثال: عبارت کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می شود؟

$$x = \text{پول علی}$$

$$3x \geq 300 + 2x$$

نکته: برای اینکه علامت یا نمادهای نامساوی و جهتشان را فراموش نکنید بهتر است از تصویر زیر کمک بگیرید.



مثال: علامت عددهای حقیقی a و b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری زیر برقرار باشد.

$$\text{الف) } \frac{a}{bc} > 0$$

این کسر به شرطی مثبت است که حاصل ضرب علامت های آن مثبت شود یعنی تعداد منفی ها زوج باشد، بنابراین:

$$۱) a > 0, b > 0, c > 0$$

$$۲) a < 0, b < 0, c > 0$$

$$۳) a > 0, b < 0, c < 0$$

$$۴) a < 0, b > 0, c < 0$$

$$\text{ب) } \frac{ac}{b^2} < 0$$

توان دوم هر عدد همواره مثبت است، بنابراین اگر یکی از عددهای صورت منفی باشد حاصل کسر منفی می شود.

$$۱) a > 0, c < 0, b > 0$$

$$۲) a < 0, c > 0, b > 0$$

$$۳) a > 0, b < 0, c < 0$$

$$۴) a < 0, b > 0, c < 0$$



درس اول : معادله خط

به رابطه ی بین ضلع مربع و محیط آن توجه کنید:

طول ضلع	۳	۲/۱	۷	$\frac{۲}{۵}$	...	x
محیط	۱۲	۸/۴	۲۸	$\frac{۸}{۵}$	...	$۴x$

اگر اندازه ی ضلع مربع را روی محور طول ها (x ها) و

محیط آن را روی محور عرض ها (y ها) نمایش دهیم

با پیدا کردن نقاطی مانند جدول بالا که در آن ها عرضشان

چهاربرابر طول یا به عبارتی دیگر $y = ۴x$ باشد

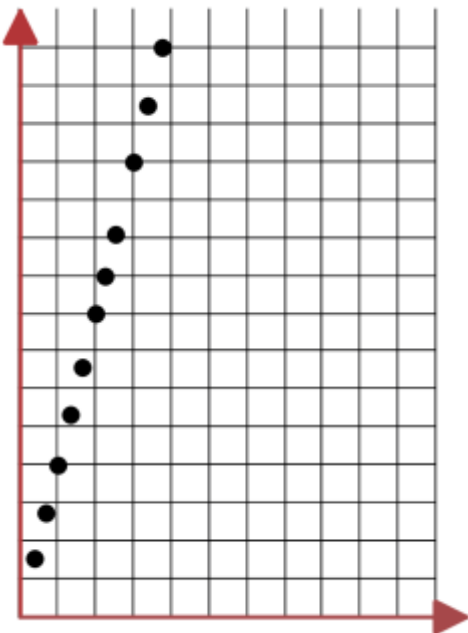
نموداری به فرم مقابل ترسیم می شود:

ویژگی همه ی این نقاط این است که عرض آن ها چهار برابر طولشان است

در واقع تمامی نقاط پاسخ هایی مناسب برای معادله ی $y = ۴x$ هستند.

هرچه تعداد پاسخ های بیشتری برای این معادله بیابیم نمودار رسم شده

بیشتر شبیه به یک خط راست خواهد بود.



نکته: معادله ی خط رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده ی آن خط وجود دارد.

مثال: برای معادله ی $x - y = ۵$ سه پاسخ مناسب بنویسید.

پاسخ: این معادله بی شمار پاسخ درست دارد. چون معادله دو متغیر دارد به یکی از آن ها یک مقدار دلخواه

می دهیم و متغیر دیگر را با حل معادله ی معمولی محاسبه می کنیم.

$$(۱) \text{ فرض کنیم } x = ۱ \text{ پس: } y = -۴ \Rightarrow -y = ۵ - ۱ = ۴ \Rightarrow y = -۴ \Rightarrow x - y = ۵$$

بنابراین $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است. (توجه داشته باشید که در مختصات داده شد عدد ۱ طول یا x و عدد ۴- عرض یا y است.)

(۲) اگر $y = ۱$ پس: $x = ۵ + ۱ = ۶ \Rightarrow x - ۱ = ۵$ بنابراین $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نیز یک پاسخ برای این معادله است.

(۳) اگر $y = ۰$ پس: $x = ۵ \Rightarrow x - ۰ = ۵$ بنابراین $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$ نیز یک پاسخ برای این معادله است.

دقت کنیم رابطه $x - y = ۵$ اتحاد نیست چون به طور مثال برای $x = ۳$ و $y = ۳$ رابطه درست نیست. (زیرا $۳ - ۳ = ۰ \neq ۵$)

نکته: با توجه به مثال داده شده، برای ترسیم یک خط با داشتن معادله ی آن کافی است دو پاسخ درست برای

آن معادله به دست آورد. و خطی که از آن دو نقطه می گذرد را ترسیم کرد. (دقت کنید از دو نقطه ی متفاوت

فقط یک خط راست می گذرد)

نکته: هر معادله به فرم $y = ax + b$ معادله ی یک خط است.



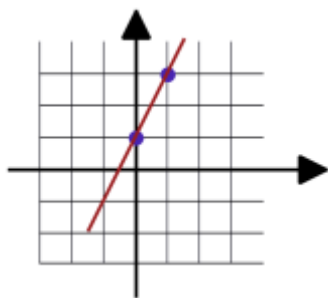
مثال: خط های زیر را ترسیم کنید.

الف) $y = 2x + 1$

پاسخ: ابتدا دو پاسخ درست برای این معادله به دست می آوریم. برای راحتی در محاسبات و نمایش بهتر در صفحه ی مختصات بهتر است از اعداد کوچک استفاده کنیم.

x	۰	۱
y	$2(0)+1=1$	$2(1)+1=3$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

اگر $x = 0$: $y = 2(0) + 1 = 1$ پس $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است.
 اگر $x = 1$: $y = 2(1) + 1 = 3$ پس $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ یک پاسخ دیگر برای این معادله است.
 مطالب بالا را می توان در جدولی به فرم مقابل خلاصه کرد:



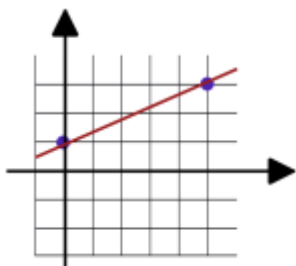
حال کافی است در صفحه ی مختصات (مانند صفحه ی مقابل) این دو نقطه را نمایش داد و خط گذرنده از آن ها را رسم کرد:

ب) $y = \frac{2}{5}x + 1$

پاسخ: ابتدا دو پاسخ درست برای این معادله به دست می آوریم. برای راحتی در محاسبات و نمایش بهتر در صفحه ی مختصات بهتر است به x مقادیر صفر و ۵ بدهیم تا محاسبات کسری نداشته باشیم.

x	۰	۵
y	۱	۳
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

اگر $x = 0$: $y = \frac{2}{5}(0) + 1 = 1$ پس $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است.
 اگر $x = 5$: $y = \frac{2}{5}(5) + 1 = 2 + 1 = 3$ پس $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ پاسخ دیگر این معادله است.
 مطالب بالا را می توان در جدولی به فرم مقابل خلاصه کرد:



حال کافی است در صفحه ی مختصات (مانند صفحه ی مقابل) این دو نقطه را نمایش داد و خط گذرنده از آن ها را رسم کرد:

نکته: شرط آن که نقطه ای روی خط قرار داشته باشد این است که طول و عرض نقطه در معادله ی خط صدق کند.

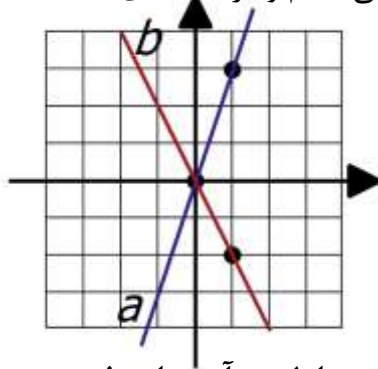
- مثال** نقطه ی $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی خط $2x + 3y = 4$ قرار ندارد زیرا:
 $2(3) + 3(-1) = 3 \neq 4$
- مثال** نقطه ی $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ روی خط $2x + y = -1$ قرار دارد زیرا:
 $2(2) + (-5) = -1$
- مثال** نقطه ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -2x - 2$ قرار ندارد زیرا:
 $-2(1) - 2 = -4 \neq -3$

نکته: برای رسم هر خط کافی است مختصات دو نقطه از آن خط را تعیین و به هم وصل کرد.

مثال خط های $b: y = -2x$ و $a: y = 3x$ را در یک صفحه ی مختصات رسم کنید.

پاسخ: مانند مثال های قبل جدول ها را کامل می کنیم و در صفحه ی مختصات دو نقطه را مشخص و خط گذرنده از آن ها را رسم می کنیم.

x	۰	۱
$y = 3x$	$3(0) = 0$	$3(1) = 3$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



x	۰	۱
$y = -2x$	$-2(0) = 0$	$-2(1) = -2$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

هر دو خط بالا از مبدا مختصات می گذرند و معادله ی آن ها به فرم $y = ax$ است. پس:

نکته: فرم کلی معادله ی خطوط مبدا گذر به فرم $y = ax$ است.

سوال ۱: آیا نقطه ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی خط $y = x + 3$ قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ: بررسی می کنیم آیا بین طول و عرض نقطه ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ رابطه ی $y = x + 3$ برقرار است؟ به y مقدار -2 و به x مقدار 1 می دهیم و تساوی را بررسی می کنیم:

$$y = x + 3$$

$$-2 \neq 1 + 3$$

چون تساوی برقرار نیست بنابراین نقطه روی خط قرار ندارد.

سوال ۲: مختصات نقطه ای از خط $y = -2x - 1$ را تعیین کنید که عرض آن -7 باشد.

پاسخ: دقت کنیم: $y = -7$ بنابراین در معادله ی خط به جای y مقدار -7 می دهیم و معادله را برای به دست آوردن x (طول) حل می کنیم:

$$y = -2x - 1 \Rightarrow -7 = -2x - 1 \Rightarrow 2x = -7 - 1 = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2} = -4$$

بنابراین مختصات نقطه ی مورد نظر $\begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$ است.

سوال ۳: مختصات محل برخورد خط $y = 2x + 4$ با محورهای مختصات را به دست آورید.

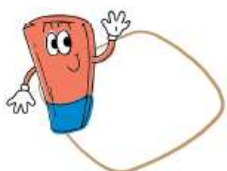
پاسخ: مختصات نقطه ای که روی محور طول ها قرار دارد به صورت $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ و

مختصات نقطه ای که روی محور عرض هاست به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ است

بنابراین برای پیدا کردن مختصاتش به طول یا عرض آن مقدار صفر می دهیم و معادله را برای پیدا کردن متغیر دیگر حل می کنیم:

الف) محل برخورد با طول ها ($y = 0$): $y = 2x + 4 \Rightarrow 0 = 2x + 4 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{-2} = -2$ [نقطه ی $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$]

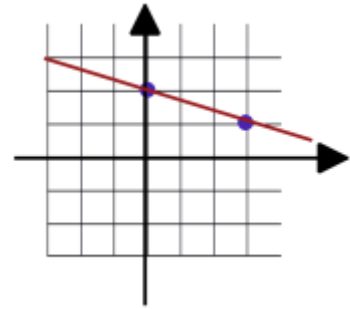
ب) محل برخورد با عرض ها ($x = 0$): $y = 2x + 4 \Rightarrow y = 2(0) + 4 = 0 + 4 = 4$ [نقطه ی $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$]



سوال ۴: خط $y = -\frac{1}{3}x + 2$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.

پاسخ: برای رسم خط به x دو مقدار دلخواه می دهیم (برای راحتی محاسبات عدد ۳ که با مخرج ۳ ساده شود) و معادله را برای پیدا کردن y حل می کنیم.

x	۰	۳
$y = -\frac{1}{3}x + 2$	$-\frac{1}{3}(0) + 2 = 2$	$-\frac{1}{3}(3) + 2 = -1 + 2 = 1$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



سوال ۵: معادله ی خطی را بنویسید که از مبداء مختصات و نقطه ی $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: فرم کلی معادله ی خطوط مبداء گذر به صورت $y = ax$ است. برای پیدا کردن a باید بدانیم عرض نقطه

ی $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ چند برابر طول آن است. یعنی عدد ۴ چند برابر ۱- است؟ بنابراین $a = \frac{4}{-1} = -4$

پس معادله ی خط برابر است با: $y = -4x$

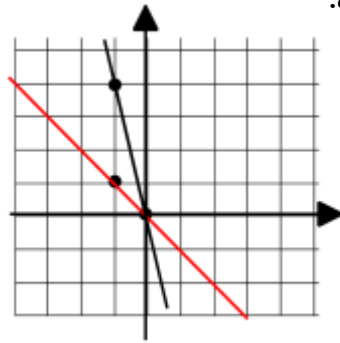


برای یادگیری بهتر و تمرین بیشتر کاردرکلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

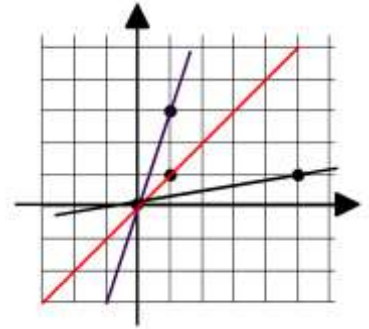
درس دوم: شیب و عرض از مبدا:

به خط های ترسیم شده ی زیر و معادله ی آن ها دقت کنید.

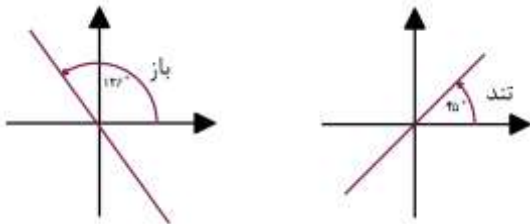
$$\begin{cases} y = -x \\ y = -4x \end{cases}$$



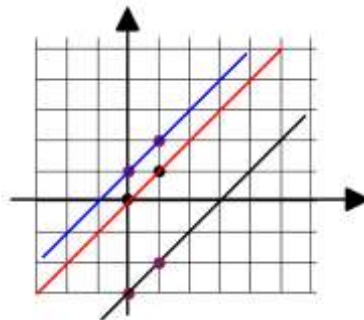
$$\begin{cases} y = x \\ y = 3x \\ y = \frac{1}{5}x \end{cases}$$



دقت کنید در خطوطی که ضریب x عددی مثبت است زاویه ی بین خط و سمت مثبت محور x ها زاویه ای تند و در خطوطی که ضریب x عددی منفی است این زاویه باز است.



$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x \\ y = x - 3 \end{cases}$$



به خط های رسم شده توجه کنید :

هر سه خط موازیند و تنها تفاوت آن ها در محل برخوردشان با محورها است. اگر به معادله ی آن ها دقت کنیم متوجه می شویم ضریب x در هر سه یکسان (عدد ۱) است و محل برخورد آن ها با محور عرض ها برابر با عددی است که با x جمع شده است. (به طور مثال $y = x$ در مبدا مختصات، خط $y = x + 1$ در نقطه ی ۱ و خط $y = x - 3$ در نقطه ۳- محور عرض ها را قطع کرده اند.)

تعریف: نقطه ی برخورد خط با محور عرض ها را عرض از مبدا می نامیم.

تعریف: فرم استاندارد خط $y = ax + b$ است که در آن مقدار a شیب خط و مقدار b عرض از مبدا است.

مثال ۱: شیب و عرض از مبدا خطوط را تعیین کنید: الف) $y = 2x + 7$ ب) $2y + 3x = 6$

پاسخ: الف) معادله ی خط به فرم $y = ax + b$ است بنابراین $2 = \text{شیب خط}$ و $7 = \text{عرض از مبدا}$

ب) معادله به فرم استاندارد نیست بنابراین آن را به کمک خواص تساوی به این فرم تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} 2y + 3x &= 6 \\ 2y &= -3x + 6 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{-3x}{2} + \frac{6}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

بنابراین: $-\frac{3}{2} = \text{شیب خط}$ و $3 = \text{عرض از مبدا}$

نکته: اگر دو خط با هم موازی باشند شیبهای یکسانی دارند. مانند دو خط $y = 3x + 4$ و $y = 3x - 7$

مثال ۲: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = 2x + 7$ موازی باشد.

پاسخ: کافی است در فرم استاندارد خط ضریب x را مثل خط داده شده عدد ۲ انتخاب کنیم. این مساله بی شمار پاسخ درست دارد. به طور مثال: $y = 2x - 11$ و $y = 2x + 4$ و $y = 2x$ همه با آن خط موازیند

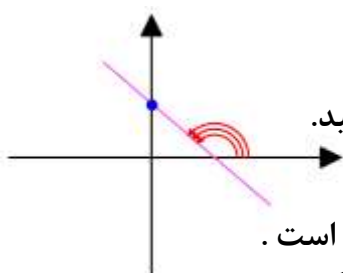
مثال ۳: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = 2x + 7$ موازی باشد و محور عرض ها را در نقطه ی ۲- قطع کند.

پاسخ: اگر خطی با $y = 2x + 7$ موازی باشد شیب آن خط باید ۲ باشد و محل برخورد خط با محور عرض ها یعنی عرض از مبدا آن خط بنابراین شیب خط ۲ و عرض از مبدا آن ۲- است پس معادله اش به صورت $y = 2x - 2$ است.

مثال ۴: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = -x + 3$ موازی باشد و از نقطه ی $\left[\frac{2}{4} \right]$ بگذرد.

پاسخ: اگر خطی با $y = -x + 3$ موازی باشد شیب آن خط باید ۱- باشد. پس معادله اش به صورت $y = -x + b$ است.

نقطه ای به طول ۲ و عرض ۴ روی این خط قرار دارد پس در معادله ی $y = -x + b$ به x مقدار ۲ و به y مقدار ۴ می دهیم تا b را به دست آوریم: $b = 4 + 2 = 6 \Rightarrow -2 + b = 4 \Rightarrow b = 4 + 2 = 6$ پس معادله ی خط برابر است با: $y = -x + 6$



مثال ۵: با توجه به خط رسم شده علامت a و b را در معادله ی $y = ax + b$ تعیین کنید.

پاسخ: در شکل مقابل زاویه با سمت راست محور طول ها باز است پس شیب خط منفی است. خط محور عرض را در قسمت مثبت قطع کرده پس عرض از مبدا مثبت است. یعنی: $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

تعیین شیب خط به کمک نمودار:

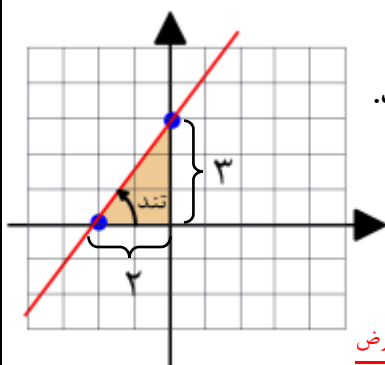
برای تعیین شیب یک خط به کمک نمودار آن به دو نکته باید توجه داشت:

(۱) زاویه ای که خط با سمت مثبت محور طول ها ساخته است.

(۲) نسبت $\frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}}$ برای هر دو نقطه ی دلخواه که روی آن خط قرار داشته باشند.

برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.

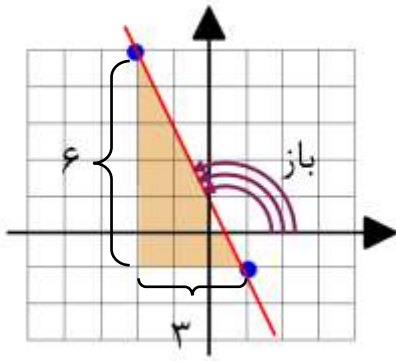
مثال) خط مقابل را در نظر بگیرید. این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ای تند ساخته است. پس شیب خط **مثبت** است.



دو نقطه ی مشخص شده را در نظر بگیرید. طبق مثلث ترسیم شده داریم: $\frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}} = \frac{3}{2}$

پس شیب این خط عدد $\frac{3}{2} +$ است.

مثال) خط مقابل را در نظر بگیرید. این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ای باز ساخته است. پس شیب خط منفی است. دو نقطه ی مشخص شده را در نظر بگیرید.



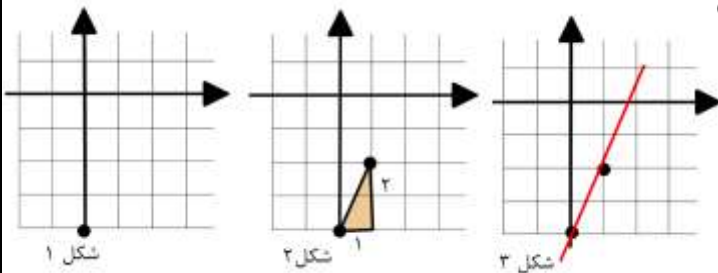
$$\text{طبق مثلث ترسیم شده داریم: } \frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}} = \frac{6}{3} = 2$$

پس شیب این خط عدد -2 است.

مثال) به کمک تعیین شیب و عرض از مبدا خط $y = 2x - 4$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا با توجه به این که عرض از مبدا خط -4 است

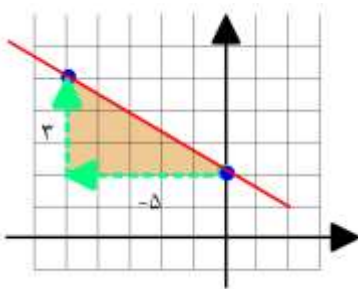
روی محور عرض ها نقطه ی -4 را مشخص می کنیم (شکل ۱) و با توجه به مثبت بودن شیب حرکتی به سمت مثبت محور طول ها با نسبت $\frac{2}{1}$ (۲ واحد عرض و یک واحد طول) طی می کنیم تا به نقطه ی دوم برسیم (شکل ۲) . با وصل کردن این دو نقطه خط را ترسیم می کنیم (شکل ۳).



مثال: خط $y = -\frac{3}{5}x + 2$ را رسم کنید.

پاسخ: عرض از مبدا خط $+2$ است. آن را روی محور عرض ها مشخص می کنیم

و با توجه به منفی بودن شیب به اندازه ی مخرجش (۵) حرکت طولی به سمت منفی و به اندازه ی صورت (۳) حرکت عرضی انجام می دهیم تا به نقطه ی دوم برسیم. با وصل کردن این دو نقطه به خط مورد نظر می رسم.



نکته: شیب ی خط گذرنده از دو نقطه ی A و B برابر است با: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

مثال: شیب خطی که از دو نقطه ی $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ می گذرد را به دست آورید.

پاسخ: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2 - (-1)}{0 - 5} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$ (دقت کنیم در به دست آوردن اختلاف ها ترتیب نوشتن را رعایت کنیم)

نکته: برای تعیین معادله ی خطی که از دو نقطه می گذرد ابتدا با دستور داده شده شیب را محاسبه و با جایگذاری مختصات یکی از نقاط در فرمول $y = ax + b$ عرض از مبدا را تعیین می کنیم.

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد.

پاسخ: به کمک دستور محاسبه ی شیب داریم: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-1)}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3$

پس معادله ی خط به صورت $y = -3x + b$ است

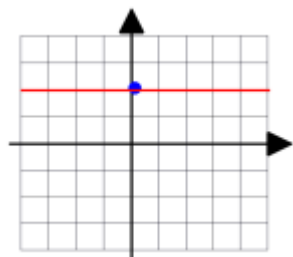
با قرار دادن یکی از نقاط در این رابطه داریم: $2 = -3(4) + b \Rightarrow 2 = -12 + b \Rightarrow b = 14$

پس معادله ی خط برابر است با: $y = -3x + 14$

خطوط موازی محورها (معادلاتی به فرم $x = a$ یا $y = b$)

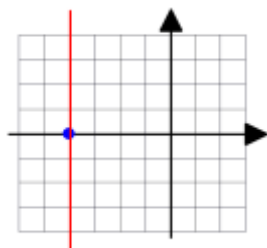
نکته: خطوط موازی محورها نیازی به نقطه یابی ندارند و فقط کافی است هر نقطه ای داده شده را روی محورش پیدا کرد و موازی با محور دیگر خطی ترسیم کرد.

مثال: $y = 2$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.



حل: ابتدا روی محور عرض ها نقطه ۲ را مشخص و سپس خطی موازی با محور x ها (طول ها) ترسیم می کنیم. ویژگی مشترک نقاط این خط این است که عرض همه ی آن ها ۲ است.

مثال: $x = -4$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.



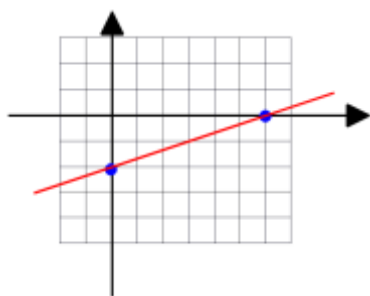
حل: ابتدا روی محور طول ها نقطه -۴ را مشخص و سپس خطی موازی با محور y ها (عرض ها) ترسیم می کنیم. ویژگی مشترک نقاط این خط این است که طول همه ی آن ها -۴ است.

نکته: شیب خطوط موازی محور طول ها (به فرم $y = b$) و شیب خطوط موازی محور عرض ها (به فرم $x = a$) تعریف نشده است.

نکته: برای رسم خطوط به فرم کلی $ax + by = c$ بهتر است یک بار به جای x و یکبار به جای y صفر قرار داد و معادله را حل کرد.

سوال ۱: خط $x - 3y = 6$ را رسم کنید:

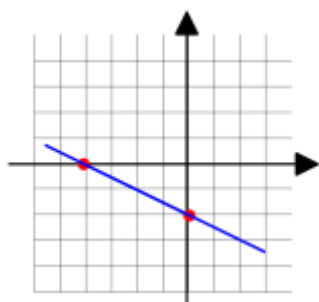
پاسخ:



اگر $x = 0$ داریم: $-3y = 6 \Rightarrow y = -2$ پس نقطه ی $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد.
اگر $y = 0$ داریم: $x - 0 = 6 \Rightarrow x = 6$ پس نقطه ی $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد.

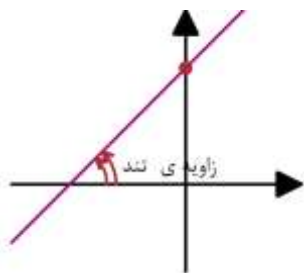
سوال ۲: خط $2x + 4y = -8$ را رسم کنید:

پاسخ:



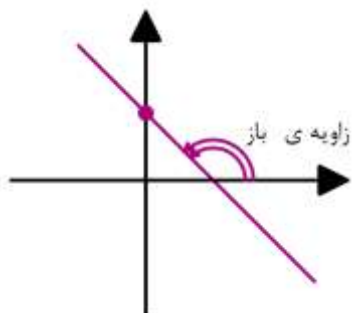
		$2x + 0 = -8$
		$x = \frac{-8}{2} = -4$
x	$\bullet$	
		$0 + 4y = -8$
		$y = \frac{-8}{4} = -2$
$2x + 4y = -8$	$\bullet$	
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

سوال ۳: خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن علامت های مختلف برای a و b نمودار تقریبی آن را رسم کنید.



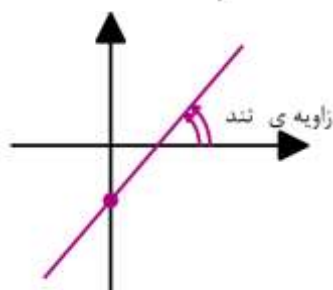
حالت ۱) $a > 0$ و $b > 0$

خطی با شیب مثبت با جهت مثبت محور طول ها زاویه تند می سازد و خطی با عرض از مبدا مثبت محور عرض ها را در قسمت مثبت قطع می کند بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.



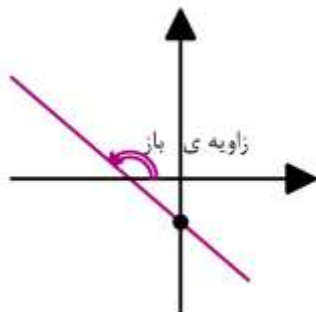
حالت ۲) $a < 0$ و $b > 0$

خطی با شیب منفی با جهت مثبت محور طول ها زاویه باز می سازد و خطی با عرض از مبدا مثبت محور عرض ها را در قسمت مثبت قطع می کند بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.



حالت ۳) $a > 0$ و $b < 0$

خطی با شیب مثبت با جهت مثبت محور طول ها زاویه تند می سازد و خطی با عرض از مبدا منفی محور عرض ها را در قسمت منفی قطع می کند بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.



حالت ۴) $a < 0$ و $b < 0$

خطی با شیب منفی با جهت مثبت محور طول ها زاویه باز می سازد و خطی با عرض از مبدا منفی محور عرض ها را در قسمت منفی قطع می کند بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.

این چهار حالت را می توان در جدول زیر خلاصه کرد:

$a < 0$	$a > 0$	شیب / عرض از مبدا
		$b > 0$
		$b < 0$

سوال ۴: معادله ی خطی که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ: با توجه به این که عرض هر دو نقطه -2 است معادله ی این خط برابر است با: $y = -2$

سوال ۵: معادله ی خط را بنویسید که موازی محور عرض ها باشد و از نقطه ی $\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: با توجه به این که معادله ی خطی که موازی محور عرض هاست به صورت: $x = a$ است و

با توجه به طول نقطه ای که روی این خط قرار دارد معادله ی خط برابر است با: $x = -1$

برای یادگیری بیشتر کاردرکلاس ها و تمرینات این درس را حل کنید.



دستگاه معادلات خطی:

دو خط در یک صفحه نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

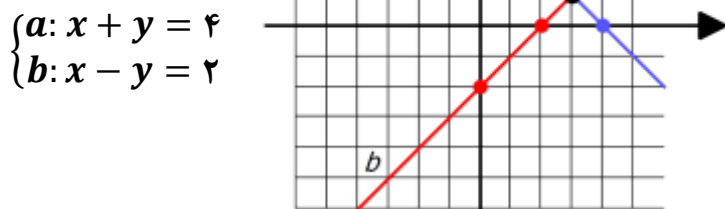
(۱) بر هم منطبق هستند. (در این حالت بی شمار نقطه ی مشترک دارند)

(۲) متقاطع هستند. (در این حالت فقط در یک نقطه با هم برخورد می کنند و یک نقطه ی مشترک دارند.)

(۳) موازیند (و هیچ نقطه ی مشترکی ندارند.)

مثال: دو خط a و b به معادلات زیر را در

یک صفحه ی مختصات رسم می کنیم.



این دو خط متقاطعند و همدیگر را در نقطه ی $M = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ قطع کرده اند و نقطه ی M پاسخ مشترک هر دو معادله است.

منظور از حل دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ پیدا کردن مختصات محل برخورد این دو خط است. یعنی پیدا کردن نقطه ای که جواب مشترک هر دو معادله باشد. (نقطه ی M)

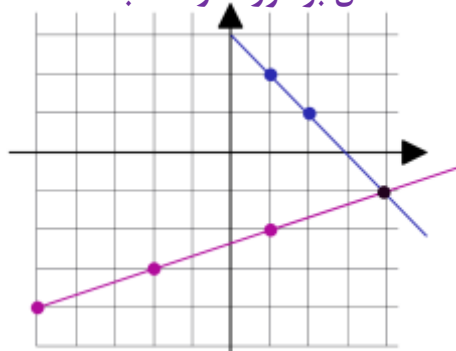
اگر دو خط داده شده موازی باشند نقطه ی تقاطع ندارند و دستگاه معادلات پاسخ ندارد.

اگر دو خط بر هم منطبق باشند دستگاه بی شمار پاسخ درست دارد.

برای حل دستگاه معادلات خطی سه روش وجود دارد.

روش اول: رسم دو خط و پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط به کمک نمودار

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$$



محل برخورد دو خط:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ پاسخ دستگاه}$$

نکته: با ضرب کردن طرفین معادله ی یک خط در عددی حقیقی معادله ی خط جدیدی به دست نمی آید.

مثال: خط $x + y = 4$ و $2x + 2y = 8$ بر هم منطبقند. زیرا با ضرب طرفین تساوی اول در عدد ۲ معادله ی

دوم به دست می آید. $2(x + y = 4) \Rightarrow 2x + 2y = 8$

روش دوم: حذفی

در این روش به کمک ضرب کردن طرفین معادلات در اعدادی مناسب و جمع طرفین، یکی از متغیرها را حذف و دیگری را با حل معادله تعیین می‌کنیم. برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

سوال: دستگاه معادلات مقابل را حل کنید:

پاسخ: اگر دو معادله را با هم جمع کنیم داریم:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

پس مقدار x در معادله‌ی بالا عدد ۵ است. حال با انتخاب یکی از خط‌ها (خط اول) و دادن مقدار ۵ به متغیر x و حل معادله، y را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4x &= 20 \\ x &= \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 + 2y &= 10 \\ 2y &= 10 - 5 = 5 \\ y &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ دستگاه جواب:}$$

مثال) دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید.

با توجه به ضرایب x و y بهتر است رابطه‌ی اول را در ۳ ضرب کنیم تا قسمت y تبدیل به $3y$ گردد. زیرا با جمع عبارتهای متشابه در دو خط، قسمت y ‌ها حذف می‌شوند (چون قرینه‌ی یکدیگرند)

$$3 \times \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 3y &= -7 \\ -3y &= -9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ جواب دستگاه:}$$

مثال) دستگاه $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ را حل کنید.

کافی است برای قرینه کردن قسمت x ‌ها رابطه‌ی اول را در -1 ضرب کنیم.

$$-1 \times \begin{cases} x + y = 7 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y &= -14 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + (-7) &= 7 \\ x &= 7 + 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix} \text{ جواب دستگاه:}$$

اگر معادلات داده شده کسری باشند یا به فرم کلی خط نوشته نشده اند ابتدا آن ها را به فرم کلی تبدیل می کنیم:

مثال) دستگاه $\begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{y}{2} = 6 \\ x = 3y - 17 \end{cases}$ را حل کنید.

ابتدا با ضرب در ک م مخرج ها معادله ی اول را ساده تر و معادله ی دوم را به فرم کلی تبدیل و حل می کنیم:

$$14 \times \begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{y}{2} = 6 \\ x = 3y - 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 84 \\ x - 3y = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 84 \\ -4x + 12y = 68 \end{cases}$$

$$19y = 152$$

$$y = 8$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$x - 3(8) = -17$$

$$x = -17 + 24 = 7$$

$$\begin{aligned} 2 \times & \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \\ -3 \times & \end{aligned}$$

گاهی برای حذف یکی از متغیرها دو معادله نیاز به تغییر دارند.
مثال) برای اینکه متغیر x در دستگاه مقابل حذف شود باید رابطه ی اول را در ۲ و رابطه ی دوم را در ۳- ضرب کنیم تا قرینه ی یکدیگر شوند:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x - 15y = -3 \end{cases}$$

و مانند سایر مثال ها آن را حل می کنیم.

روش سوم: جایگزینی

در این روش مقدار یکی از متغیرها را از رابطه ی اول یا دوم محاسبه و در رابطه ی دیگر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

مثال: دستگاه مقابل را به روش جایگزینی حل کنید.

با جابه جا کردن $3y - 4$ در رابطه ی $x - 3y = 4$ داریم: $x = 3y + 4$

پس در معادله ی دوم مقدار $x = 3y + 4$ قرار می دهیم:

$$2x + y = 8 \Rightarrow 2(3y + 4) + y = 8$$

$$\Rightarrow 6y + 8 + y = 8 \Rightarrow 7y = 8 - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{7} = 0$$

و با قرار دادن مقدار y در همان رابطه مقدار x را محاسبه می کنیم: $x = 3y + 4 = 3 \times 0 + 4 = 4$

پاسخ دستگاه نقطه ی $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ است.



مثال: دستگاه را به روش جایگزینی حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 6y = -7 \end{cases}$$

پاسخ: با توجه به معادله دوم داریم:

$$x - 6y = -7 \Rightarrow x = 6y - 7$$

با جایگزین کردن $6y - 7$ به جای x در معادله اول داریم:

$$\Rightarrow 2(6y - 7) + y = -1$$

$$\Rightarrow 13y - 14 = -1 \Rightarrow 13y = 13 \Rightarrow y = 1$$

برای محاسبه x مقدار $y=1$ را در رابطه $x = 6y - 7$ قرار می دهیم.

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x = 6y - 7 \Rightarrow x = 6(1) - 7 = -1$$

حل مساله به کمک دستگاه:

مثال:

سن علی دو برابر سن خواهرش است. اگر مجموع سن آنها ۲۴ سال باشد، سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

علی ۱۶ ساله و خواهرش ۸ ساله است

سن علی: x سن خواهرش: y جمع سن آنها: $x + y = 24$

$$\begin{aligned} x + y &= 24 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x + y &= 24 \\ -x - y &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3y &= -24 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

$$x = 2 \times 8 = 16$$

مثال:

اختلاف دو زاویه ی متمم ۲۰ درجه است. اندازه ی هر کدام چقدر است؟

پاسخ: زاویه کوچک: y زاویه ی بزرگ: x (مجموع دو زاویه ی متمم ۹۰ درجه است)

با توجه به داده های سوال دو معادله می نویسیم و دستگاه را به روش دلخواه حل می کنیم:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$$2x = 110$$

$$x = \frac{110}{2} = 55$$

$$\Rightarrow 55 - y = 20 \Rightarrow y = 55 - 20 = 35$$

برای یادگیری بهتر کاربرد کلاس ها و تمرینات این درس را حل کنید.

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارت های گویا

به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند عبارت گویا می گویند. مانند: $-\frac{3}{8}$ ، $\frac{x}{2x-8}$

مثال: الف * آیا عبارت $\frac{3x-1}{2+\sqrt{xy}}$ عبارتی گویا است؟ چرا؟

پاسخ: خیر - زیرا مخرج آن چند جمله ای نمی باشد. (در فصل ۵ یاد گرفتیم که هر گاه متغیر، زیر رادیکال باشد، آن عبارت چند جمله ای نیست)

❖ **نکته:** هر گاه در عبارتی، متغیر، زیر رادیکال باشد یا درون قدر مطلق باشد و یا در توان باشد آن گاه آن عبارت، گویا نیست.

 **تمرین ۱.** کدام یک از عبارت های زیر، گویا است؟

الف * $\frac{-x^2}{\sqrt{5+x}}$ هست ب * $\frac{|a-b|}{x}$ نیست پ * $\frac{-2}{\sqrt[3]{12}}$ هست ت * $\frac{\sqrt{3}}{x}$ هست

ث * $\frac{a}{\sqrt{y}}$ نیست ج * $\sqrt[3]{a^{-1}}$ هست چ * $\frac{\sqrt{2}x^3-y^3}{x^2+1/2}$ هست ح * $\frac{x}{y}$ هست

خ * $\frac{y^{xy}}{2x-7}$ نیست د * x^2-3x+5 هست ذ * -4 هست ر * $\frac{mn+n^2}{3-n}$ هست

ز * $\frac{x+\sqrt{8/5}}{|-6|}$ هست ژ * x^2y^{-3} هست س * 2^{a-b} نیست ش * $\sqrt[3]{a}$ نیست

مقادیر تعریف نشده عبارت گویا

می دانیم کسرهایی که مخرج آن ها صفر باشد تعریف نشده هستند (مانند $\frac{7}{0}$ ، $\frac{5}{0}$ و ...)؛ یعنی مقدار مشخصی ندارند. بنابراین یک عبارت گویا زمانی تعریف نشده است که مخرج آن مساوی صفر باشد.

 **تمرین ۲.** هر یک از عبارت های زیر، به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف * $\frac{3x+1}{x+1}$

ب * $\frac{a-1}{3a+2}$

مخرج = ۰ $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ مخرج = ۰ $\Rightarrow 3a+2=0 \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}}$

پس عبارت بالا به ازای $x = -1$ تعریف نشده است. پس عبارت بالا به ازای $a = -\frac{2}{3}$ تعریف نشده است.

$$\text{پ}^* \frac{7x}{x^2-9}$$

اتحاد مزدوج

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = +3}$$

$$(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = +3$ و

$x = -3$ تعریف نشده است.

$$\text{ث}^* \frac{8+x}{x}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = 0$

تعریف نشده است.

$$\text{ت}^* \frac{a}{a^2-5a+6}$$

اتحاد جمله مشترک

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \underbrace{a^2-5a+6}_{\text{ضرب جمع}} = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) = 0 \Rightarrow$$

$$(a-2) = 0 \Rightarrow \boxed{a = +2}$$

$$(a-3) = 0 \Rightarrow \boxed{a = +3}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $a = +2$ و $a = +3$ تعریف نشده است.

$$\text{ج}^* \frac{4a}{a^2+7}$$

می دانیم که هر مقداری را به جای a انتخاب کنیم، حاصل a^2 عددی نامنفی می شود

پس عبارت $a^2 + 7$ هیچگاه صفر نمی شود بنابراین عبارت گویای بالا به ازای هر

عدد حقیقی دلخواه، همیشه تعریف شده است.

❖ **توجه:** هر گاه توان متغیر مخرج زوج باشد و با یک عدد

حقیقی جمع شده باشد آنگاه مخرج هیچگاه صفر نمی شود و

عبارت گویا همواره تعریف شده است.

$$\text{ج}^* \frac{2x}{x(3x-9)}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x(3x-9) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$(3x-9) = 0 \Rightarrow 3x = +9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{x = +3}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = +3$ و $x = 0$ تعریف نشده است.

$$\text{ح}^* \frac{4+x}{-5}$$

عبارت گویای بالا به ازای هر عدد حقیقی دلخواه، همیشه

تعریف شده است. چون مخرج عبارت گویا، یک عدد حقیقی

است و هیچگاه صفر نمی شود.

$$\text{خ}^* \frac{m}{m^6+7}$$

چون توان متغیر مخرج زوج است و با یک عدد حقیقی

جمع شده است بنابراین مخرج هیچگاه صفر نمی شود و

عبارت گویا همواره تعریف شده است.

$$\text{د}^* \frac{9x}{x^2}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = 0$ تعریف نشده است.

$$\text{ذ}^* \frac{3t}{t^2+5t}$$

فاکتورگیری

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow t^2 + 5t = 0 \Rightarrow t(t+5) = 0$$

$$\begin{cases} \boxed{t = 0} \\ t+5 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -5} \end{cases}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $t = -5$ و $t = 0$ تعریف نشده است.

ساده کردن عبارت های گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا در صورت امکان، صورت و مخرج کسر را به کمک اتحادها یا فاکتورگیری، تجزیه کرده سپس عامل های مشترک موجود در صورت و مخرج کسر را حذف می کنیم.

❖ **توجه:** تا پایان این فصل، تمام مخرج ها مخالف صفر فرض می شوند.

✍ **تمرین ۳:** عبارت های گویای زیر را ساده کنید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف * $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \frac{\text{اتحاد جمله مشترک}}{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x-2}$

ب * $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x} = \frac{\text{فاکتورگیری}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^2}{x} = x$

پ * $\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{\text{اتحاد جمله مشترک}}{\text{اتحاد جمله مشترک}} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+1}{x-2}$

ت * $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{\text{فاکتورگیری}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{\text{اتحاد جمله مشترک}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{(y-3)(y+1)}{(y+1)} = y-3$

ث * $\frac{x-y}{y-x} = \frac{(x-y)}{-(x-y)} = -1$

ج * $\frac{2+x}{-x-2} = \frac{(2+x)}{-(x+2)} = -1$

چ * $\frac{1-a^2}{a^2+1} = \frac{\text{اتحاد مزدوج}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{(1-a^2)(1+a^2)}{(a^2+1)} = 1-a^2$

ح * $\frac{-10a+15}{4a-6} = \frac{\text{فاکتورگیری}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{-5(2a-3)}{2(2a-3)} = -\frac{5}{2}$

✍ **تمرین ۴:** در هر مورد، گزینه درست را انتخاب کنید.

الف * کدام یک از عبارت های زیر را می توان ساده کرد؟

☐ $\frac{x^2+7x}{x}$ (۴)

☐ $\frac{x^2+7}{x^2-7}$ (۳)

☐ $\frac{x^2+7}{7}$ (۲)

☐ $\frac{x^2+7}{x+7}$ (۱)

$\frac{x^2+7x}{x} = \frac{\text{فاکتورگیری}}{\text{فاکتورگیری}} = \frac{x(x+7)}{x} = x+7$

پاسخ: گزینه (۴) - زیرا

ب * کدام یک از عبارت های زیر با $\frac{x}{y}$ برابر است؟

☐ $\frac{x+3}{y+3}$ (۴)

☐ $\frac{3-x}{3-y}$ (۳)

☐ $\frac{3x}{3y}$ (۲)

☐ $\frac{x^3}{y^3}$ (۱)

$\frac{3x}{3y} = \frac{x}{y}$

پاسخ: گزینه (۲) -

پ * عبارت $\frac{-2+x}{x+4}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

☐ (۱) $-\frac{x-2}{x+4}$
 ☐ (۲) $\frac{x+2}{x+4}$
 ☐ (۳) $-\frac{2-x}{x+4}$
 ☐ (۴) $-\frac{2+x}{x+4}$

پاسخ: گزینه (۳) - زیرا اگر علامت منفی را در صورت کسر ضرب کنیم داریم:

$$-\frac{2-x}{x+4} = \frac{-2+x}{x+4}$$

ت * عبارت $\frac{3-x}{x-5}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

☐ (۱) $-\frac{x-3}{x-5}$
 ☐ (۲) $\frac{x-3}{5-x}$
 ☐ (۳) $\frac{3-x}{x-5}$
 ☐ (۴) $-\frac{3-x}{x-5}$

پاسخ: گزینه (۲) - زیرا

$$\frac{x-3}{5-x} = \frac{-(3-x)}{-(x-5)} = \frac{3-x}{x-5}$$

ث * حاصل کدام عبارت برابر ۱- می باشد؟

☐ (۱) $\frac{3x+7}{3x-7}$
 ☐ (۲) $\frac{6x-1}{-1-6x}$
 ☐ (۳) $\frac{6y+5}{5+6y}$
 ☐ (۴) $\frac{2y-5}{5-2y}$

پاسخ: گزینه (۴) - زیرا

$$\frac{2y-5}{5-2y} = \frac{2y-5}{-(2y-5)} = -1$$

❖ نکته: هر گاه صورت و مخرج یک عبارت گویا قرینه یکدیگر باشند، حاصل آن عبارت، ۱- می شود.

ج * حاصل کدام عبارت برابر ۱ می باشد؟

☐ (۱) $\frac{2a+5}{2a-5}$
 ☐ (۲) $\frac{2a-5}{5-2a}$
 ☐ (۳) $\frac{2a+5}{-2a-5}$
 ☐ (۴) $\frac{2a+5}{5+2a}$

پاسخ: گزینه (۴) - زیرا

$$\frac{2a+5}{5+2a} = \frac{2a+5}{2a+5} = 1$$

❖ نکته: هر گاه صورت و مخرج یک عبارت گویا مساوی باشند، حاصل آن عبارت، ۱ می شود.

❖ نکته: اگر صورت و مخرج یک عبارت گویا را در هر عبارت دلخواهی بجز صفر ضرب کنیم یا بر هر عبارت دلخواهی بجز صفر تقسیم کنیم عبارت حاصل با عبارت گویای اولیه برابر خواهد بود.

✍ تمرین ۵. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

الف * $\frac{5}{3x} = \frac{\boxed{5y}}{3xy}$ ب * $\frac{5x}{2-x} = \frac{5x^2+10x}{\boxed{}}$

پاسخ: ابتدا کل عبارت های موجود در صورت و مخرج دو کسر را در صورت امکان با کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرده و سپس صورت ها را با هم و مخرج ها را با هم مقایسه می کنیم.

الف * $\frac{5}{3x} \xrightarrow{\times y} = \frac{\boxed{5y}}{3xy}$ ب * $\frac{5x}{2-x} \xrightarrow{\times (x+2)} = \frac{5x(x+2)}{\boxed{(2-x)(x+2)}}$

$$\text{پ}^* \frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^2+z}$$

$$\text{ت}^* \frac{x-1}{x} = \frac{\boxed{}}{x^3+x^2+x}$$

$$\frac{1-z}{z} \xrightarrow{\times(z+1)} \frac{(1-z)(z+1)}{z(z+1)}$$

$$\frac{x-1}{x} \xrightarrow[\times(x^2+x+1)]{\times(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)}$$

پاسخ:

$$\text{ث}^* \frac{x}{\boxed{}} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$$

پاسخ
⇒

$$\frac{x}{(x+2)} \xrightarrow[\times(x-2)]{\times(x-2)} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

درس دوم: محاسبات عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است. فقط قبل از انجام عمل ضرب یا تقسیم، در صورت امکان کسر ها را به روشی که قبلاً گفتیم ساده می کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

و

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

 تمرین ۶. حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین شکل بنویسید.

$$\text{الف}^* \frac{1 \cdot x}{x^2-4} \times \frac{x^2-2x}{5x^2} = \frac{\cancel{x}^2}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x(x-2)}{5x^2} = \frac{2\cancel{x}}{5x(x+2)} = \frac{2}{(x+2)}$$

$$\text{ب}^* \frac{5x^2-15x}{x+7} \times \frac{7}{x-3} = \frac{5x(x-3)}{x+7} \times \frac{7}{x-3} = \frac{35x}{x+7}$$

$$\text{پ}^* \frac{a^2-1}{a^2-2a+1} \div \frac{2a+2}{ax-x} = \frac{a^2-1}{a^2-2a+1} \times \frac{ax-x}{2a+2} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a-1)} \times \frac{x(a-1)}{2(a+1)} = \frac{x}{2}$$

$$\text{ت}^* \frac{x^2y-xy}{x^2-1} \div \frac{6y}{3x^2+3x} = \frac{x^2y-xy}{x^2-1} \times \frac{3x^2+3x}{6y} = \frac{xy(x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{3x(x+1)}{6y} = \frac{x^2}{2}$$

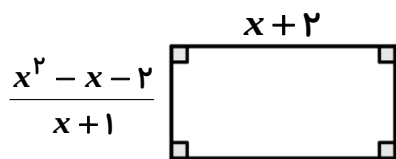
$$\text{ث}^* \frac{x^2-49}{x^2+6x-7} \div \frac{7-x}{x+1} = \frac{x^2-49}{x^2+6x-7} \times \frac{x+1}{7-x} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x-7)(x-1)} \times \frac{x+1}{-(x-7)} = \frac{x+1}{-(x-1)}$$

$$ج* \frac{3a^2}{a+1} \div \frac{a^2-a}{a^2-1} = \frac{3a^2}{a+1} \times \frac{a^2-1}{a^2-a} = \frac{3a^2}{\cancel{a+1}} \times \frac{(\cancel{a-1})(\cancel{a+1})}{a(\cancel{a-1})} = 3a$$

$$ج* \frac{m+4}{3m^2-12m} \div \frac{m^2+8m+16}{m^2-4m} = \frac{m+4}{3m^2-12m} \times \frac{m^2-4m}{m^2+8m+16} =$$

$$\frac{(\cancel{m+4})}{3\cancel{m}(m-4)} \times \frac{\cancel{m}(m-4)}{(m+4)(\cancel{m+4})} = \frac{1}{3(m+4)}$$

 **تمرین ۷.** مساحت مستطیل زیر را بر حسب x ($x > 2$) به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)



پاسخ: می دانیم مساحت مستطیل برابر است با طول ضربدر عرض .

بنابراین طول و عرض را ضرب کرده و ساده می کنیم:

$$\frac{x^2-x-2}{x+1} \times \frac{x+2}{1} = \frac{(\cancel{x+1})(x-2)}{\cancel{x+1}} \times \frac{x+2}{1} = (x-2)(x+2)$$

 **تمرین ۸.** مساحت مستطیلی به ابعاد $\frac{x^2-4}{x+2}$ و $\frac{x+3}{x^2-2x}$ را به دست آورید. ($x > 2$)

پاسخ:

$$\frac{x^2-4}{x+2} \times \frac{x+3}{x^2-2x} = \frac{(\cancel{x+2})(x-2)}{\cancel{x+2}} \times \frac{x+3}{x(\cancel{x-2})} = \frac{x+3}{x}$$

 **تمرین ۹.** اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ باشد ، آن گاه حاصل عبارت زیر را به دست

آورید. (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{aligned} \frac{A^2-B^2}{C^2} &= \\ \frac{A^2-B^2}{C^2} &= \frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{(a^4-2a^2b^2+b^4)-(a^4+2a^2b^2+b^4)}{4a^2b^2} \\ &= \frac{a^4-2a^2b^2+\cancel{b^4}-a^4-2a^2b^2-\cancel{b^4}}{4a^2b^2} = \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1 \end{aligned}$$

پاسخ:

توجه: استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای $(a^2 - b^2)^2 = (a^2)^2 - 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

توجه: استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای $(a^2 + b^2)^2 = (a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

تمرین ۱۰: دو عبارت گویا بنویسید که حاصل ضرب آن ها $\frac{a+7}{a-3}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{a+7}{\square} \times \frac{\square}{a-3}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای یکسان قرار دهیم. بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{a+7}{\boxed{5x}} \times \frac{\boxed{5x}}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}, \quad \frac{a+7}{\boxed{2a-1}} \times \frac{\boxed{2a-1}}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}, \quad \frac{a+7}{\boxed{2}} \times \frac{\boxed{2}}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$$

تمرین ۱۱: عبارت گویایی بیابید که اگر در عبارت $\frac{x^2-16}{3x+y}$ ضرب شود حاصل آن برابر $x-4$ شود.

$$\frac{x^2-y^2}{3x+y} \times \frac{\square}{\square} = x-y \quad \text{پاسخ:}$$

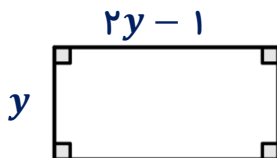
کافی است عبارت $x-y$ را بر $\frac{x^2-y^2}{3x+y}$ تقسیم کنیم:

$$x-y \div \frac{x^2-y^2}{3x+y} = \frac{x-y}{1} \times \frac{3x+y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{1} \times \frac{3x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x+y}{x+y}$$

تمرین ۱۲: طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این

مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید. (تمرین کتاب درسی)

پاسخ: عرض مستطیل را y در نظر می گیریم. چون مقدار طول مستطیل از ۲ برابر عرض آن یک واحد کمتر است بنابراین طول مستطیل به صورت جبری برابر است با $2y-1$.



$$\Rightarrow (\text{عرض} + \text{طول}) \times 2 = \text{محیط مستطیل}$$

$$P = 2 \times \left(\underbrace{2y-1}_{\text{طول}} + \underbrace{y}_{\text{عرض}} \right) = 2 \times (3y-1) = 6y-2$$

$$\Rightarrow S = (2y-1) \times y = 2y^2 - y \quad \text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا

❖ **نکته:** در جمع و تفریق عبارت های گویا، اگر مخرج ها مساوی نباشند ابتدا مخرج مشترک می گیریم.

❖ **نکته:** برای گرفتن مخرج مشترک، ابتدا در صورت امکان، مخرج ها را با کمک فاکتورگیری و اتحادها تجزیه می کنیم سپس حاصل ضرب عامل های مشترک با توان بیشتر و عامل های غیر مشترک را به عنوان مخرج مشترک در نظر می گیریم.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

📌 **تمرین ۱۳.** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف}^* \quad \frac{3x+1}{5x+3} - \frac{8x+4}{5x+3} = \frac{3x+1-(8x+4)}{5x+3} = \frac{3x+1-8x-4}{5x+3} = \frac{-5x-3}{5x+3} = \frac{-(5x+3)}{5x+3} = -1$$

$$\text{ب}^* \quad \frac{6}{x} - \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{10}{x}$$

$$\text{پ}^* \quad \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$$

$$\text{ت}^* \quad \frac{-3x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} = \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)} = \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2 \times (x-2)}{(x+2) \times (x-2)} =$$

$$\frac{-3x+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{ث}^* \quad \frac{2x-4}{5-x} - \frac{5x-2}{x-5} = \frac{2x-4}{5-x} - \frac{5x-2}{-(5-x)} = \frac{2x-4}{5-x} + \frac{5x-2}{(5-x)} = \frac{2x-4+5x-2}{5-x} = \frac{7x-6}{5-x}$$

$$\text{ج}^* \quad \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1 \times (x-1)}{(x+2) \times (x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\frac{x-1-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{چ}^* \quad \frac{5x^2}{x^2+x} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5x^2}{x(x+1)} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5x^2}{x(x+1)} - \frac{3x \times x}{(x+1) \times x} = \frac{5x^2-3x^2}{x(x+1)} = \frac{2x^2}{x(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)}$$

$$\text{ح}^* \quad \frac{5x+1}{x^2-y^2} - \frac{6}{x+y} = \frac{5x+1}{(x-y)(x+y)} - \frac{6}{x+y} = \frac{(5x+1)}{(x-y)(x+y)} - \frac{6 \times (x-y)}{(x+y) \times (x-y)} =$$

$$\frac{(5x+1)-6(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{5x+1-6x+6y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x+6y+1}{(x-y)(x+y)}$$

$$\begin{aligned}\dot{\text{c}}^* \frac{-x^2}{x^2-9} - \frac{x}{x+3} &= \frac{-x^2}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{x+3} = \frac{-x^2}{(x-3)(x+3)} - \frac{x \times (x-3)}{(x+3) \times (x-3)} = \\ &= \frac{-x^2 - x(x-3)}{(x+3) \times (x-3)} = \frac{-x^2 - x^2 + 3x}{(x+3) \times (x-3)} = \frac{-2x^2 + 3x}{(x+3)(x-3)}\end{aligned}$$

$$\text{d}^* \frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x} = \frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{-(x-y)} = \frac{x-1}{x-y} + \frac{1-y}{(x-y)} = \frac{x-1+1-y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

$$\begin{aligned}\dot{\text{z}}^* \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2 - x &= \frac{4+x^2-2x}{(2+x)} + \frac{(-2-x)}{1} = \frac{4+x^2-2x}{(2+x)} + \frac{(-2-x) \times (2+x)}{1 \times (2+x)} = \\ &= \frac{4+x^2-2x-4-2x-2x-x^2}{(2+x)} = \frac{-6x}{2+x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{r}^* \frac{4x}{3x-12} + \frac{x}{x^2-16} &= \frac{4x}{3(x-4)} + \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{4x \times (x+4)}{3(x-4) \times (x+4)} + \frac{x \times 3}{(x-4)(x+4) \times 3} = \\ &= \frac{4x^2+16x+3x}{3(x-4) \times (x+4)} = \frac{4x^2+19x}{3(x-4) \times (x+4)}\end{aligned}$$

$$\text{z}^* \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} = \frac{1 \times (x+2)}{(x-3) \times (x+2)} + \frac{2 \times (x-3)}{(x+2) \times (x-3)} = \frac{x+2+2x-6}{(x-3) \times (x+2)} = \frac{+3x-4}{(x-3)(x+2)}$$

$$\text{j}^* \frac{3}{x-y} + \frac{4}{x+y} = \frac{3 \times (x+y)}{(x-y) \times (x+y)} + \frac{4 \times (x-y)}{(x+y) \times (x-y)} = \frac{3x+3y+4x-4y}{(x+y) \times (x-y)} = \frac{7x-y}{(x+y)(x-y)}$$

$$\text{c}^* \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \times b}{a \times b} + \frac{(a+b) \times a}{b \times a} = \frac{ab+b^2}{ab} + \frac{a^2+ab}{ba} = \frac{a^2+2ab+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$\begin{aligned}\text{ش}^* \frac{m+3}{m^2-9} + \frac{m+7}{m^2+1 \cdot m+21} &= \frac{m+3}{(m+3)(m-3)} + \frac{m+7}{(m+3)(m+7)} = \frac{1}{(m-3)} + \frac{1}{(m+3)} = \\ &= \frac{1 \times (m+3)}{(m-3) \times (m+3)} + \frac{1 \times (m-3)}{(m+3) \times (m-3)} = \frac{m+3+m-3}{(m+3) \times (m-3)} = \frac{2m}{(m+3)(m-3)}\end{aligned}$$

تمرین ۱۴: اندازه اضلاع مثلثی $\frac{x+3}{2x}$ ، $\frac{5}{3x}$ و $\frac{4x+2}{x}$ است. محیط این مثلث را به دست آورید. ($x > 0$)
پاسخ: برای یافتن محیط مثلث، کافی است که هر سه ضلع مثلث را با هم جمع کنیم و مخرج مشترک بگیریم:

$$P = \frac{5}{3x} + \frac{x+3}{2x} + \frac{4x+2}{x} = \frac{5 \times 2}{3x \times 2} + \frac{(x+3) \times 3}{2x \times 3} + \frac{(4x+2) \times 6}{x \times 6} = \frac{10 + 3x + 9 + 24x + 12}{6x} = \frac{27x + 31}{6x}$$

تمرین ۱۵: الف* دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{x+8}{2x-1}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{x+8}{2x-1} = \frac{\boxed{}}{2x-1} + \frac{\boxed{}}{2x-1}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای به گونه ای قرار دهیم که حاصل جمع آنها $2x - 1$ شود. بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{\boxed{x}}{2x-1} + \frac{\boxed{8}}{2x-1} = \frac{x+8}{2x-1}, \quad \frac{\boxed{x+7}}{2x-1} + \frac{\boxed{1}}{2x-1} = \frac{x+8}{2x-1}, \quad \frac{\boxed{4x}}{2x-1} + \frac{\boxed{-3x+8}}{2x-1} = \frac{x+8}{2x-1}$$

ب* دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{4x}{x+5}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{4x}{x+5} = \frac{\boxed{}}{x+5} + \frac{\boxed{}}{x+5}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای به گونه ای قرار دهیم که حاصل جمع آنها $a + 7$ شود. بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{\boxed{3x}}{x+5} + \frac{\boxed{x}}{x+5} = \frac{4x}{x+5}, \quad \frac{\boxed{6x}}{x+5} + \frac{\boxed{-2x}}{x+5} = \frac{4x}{x+5}, \quad \frac{\boxed{5x}}{x+5} + \frac{\boxed{-x}}{x+5} = \frac{4x}{x+5}$$

ساده کردن عبارت های مرکب

کسری که صورت و مخرج آن عبارت های گویا باشد، کسر گویای مرکب نام دارد.

❖ **نکته:** برای به دست آوردن حاصل یک عبارت گویای مرکب، ابتدا حاصل صورت و حاصل مخرج را جداگانه به دست می آوریم و سپس آن ها را بر هم تقسیم می کنیم.

تمرین ۱۶: حاصل هر عبارت را به ساده ترین شکل بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

الف* $\frac{\frac{3}{x} + 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x}} =$

حاصل صورت $= \frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2 \times x}{1 \times x} = \frac{3+2x}{x}$ حاصل مخرج $\Rightarrow \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2} - \frac{1 \times x}{x \times x} = \frac{5-x}{x^2}$

حاصل کل عبارت $\Rightarrow \frac{\frac{3}{x} + 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{x} + 2 \right) \div \left(\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{3+2x}{x} \div \frac{5-x}{x^2} = \frac{3+2x}{x} \times \frac{x^2}{5-x} = \frac{x(3+2x)}{5-x}$

$$*ب \quad \frac{a - \frac{a^2}{a-b}}{1 + \frac{b^2}{a^2-b^2}} =$$

$$\text{حاصل صورت} = a - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a \times (a-b)}{1 \times (a-b)} - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2 - ab - a^2}{a-b} = \frac{-ab}{a-b}$$

$$\text{حاصل مخرج} \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{1 \times (a^2-b^2)}{1 \times (a^2-b^2)} + \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل کل عبارت} \Rightarrow \frac{a - \frac{a^2}{a-b}}{1 + \frac{b^2}{a^2-b^2}} &= \left(a - \frac{a^2}{a-b} \div \left(1 + \frac{b^2}{a^2-b^2} \right) \right) = \frac{-ab}{a-b} \div \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{-ab}{a-b} \times \frac{a^2-b^2}{a^2} \\ &= \frac{-ab}{a-b} \times \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = \frac{-b(a+b)}{a} \end{aligned}$$

$$*پ \quad \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} =$$

$$\text{حاصل صورت} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1 \times y}{x \times y} - \frac{1 \times x}{y \times x} = \frac{y-x}{xy}$$

$$\text{حاصل مخرج} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1 \times y}{x \times y} + \frac{1 \times x}{y \times x} = \frac{y+x}{xy}$$

$$\text{حاصل کل عبارت} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \div \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \div \frac{y+x}{xy} = \frac{y-x}{xy} \times \frac{xy}{y+x} = \frac{y-x}{y+x}$$

 **تمرین ۱۷.** کدام یک از تساوی های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید.

$$\frac{1}{a-b} \xrightarrow{\times(-1)} = \frac{-1}{-a+b}$$

پاسخ: نادرست - زیرا

$$\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b} \quad * \text{ الف}$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}} = \frac{x}{y} \div \frac{x}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{z}{x} = \frac{z}{y}$$

پاسخ: درست - زیرا

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}} = \frac{z}{y} \quad * \text{ ب}$$

$$-\frac{x+2}{x+5} = \frac{-x-2}{x+5}$$

پاسخ: نادرست - زیرا

$$-\frac{x+2}{x+5} = \frac{-x+2}{x+5} \quad * \text{ پ}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{5x-2}{y} = \frac{x-(5x-2)}{y} = \frac{x-5x+2}{y} = \frac{-4x+2}{y}$$

پاسخ: نادرست - زیرا

$$\frac{x}{y} - \frac{5x-2}{y} = \frac{-4x+2}{y} \quad * \text{ ت}$$

درس سوم: تقسیم چند جمله ای ها

تقسیم چند جمله ای ها شامل سه بخش است:

(۱) تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای

برای تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده کردن جمله های توان دار استفاده می کنیم.

مثال: حاصل تقسیم $\frac{14x^5y}{2x^2y^2}$ را به دست آورید.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{x^3}{\cancel{x^5}}}{\cancel{x^2}} \times \frac{\cancel{y}}{\underset{y}{\cancel{y^2}}} = \frac{7x^3}{y}$$

پاسخ:

تمرین ۱۸: حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف $\frac{-15a^2b^2}{45ab^6} = \xrightarrow{\text{پاسخ}} \frac{-a^2}{3b^4}$

ب $\frac{-36x^2y^3z}{24x^9y^3} = \xrightarrow{\text{پاسخ}} -\frac{3z}{2x^7}$

پاسخ:

پ $\frac{-\sqrt{50}m^2np^2}{5np^2} = \xrightarrow{\text{پاسخ}} \frac{-5\sqrt{2}m^2np^2}{5np^2} = -\sqrt{2}m^2p^2$ $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(۲) تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

برای تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای، تک تک جملات صورت کسر را بر یک جمله ای مخرج، تقسیم می کنیم و حاصل را ساده می کنیم. یعنی

$$\frac{a+b+c+\dots+n}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + \dots + \frac{n}{d}$$

تمرین ۱۹: حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

الف $\frac{18a^3-24a^2+12a}{3a} = \xrightarrow{\text{پاسخ}} \frac{18a^3}{3a} - \frac{24a^2}{3a} + \frac{12a}{3a} = 6a^2 - 8a + 4$

ب $\frac{27a^3b^2-36a^2b^5-18a^2b^3}{9a^2b} = \xrightarrow{\text{پاسخ}} \frac{27a^3b^2}{9a^2b} - \frac{36a^2b^5}{9a^2b} - \frac{18a^2b^3}{9a^2b} = 3ab - 4a^2b^4 - 2b^2$

پ $(5a + 6a^2 - 10a^3 - 3a^5) \div (30a) = \xrightarrow{\text{پاسخ}} \frac{5a}{30a} + \frac{6a^2}{30a} - \frac{10a^3}{30a} - \frac{3a^5}{30a} = \frac{1}{6} + \frac{a}{5} - \frac{a^2}{3} - \frac{a^4}{10}$

۳) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

- ۱- قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان نزولی متغیر، مرتب می کنیم. (یعنی از توان بیشتر به توان کمتر)
- ۲- اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می کنیم.
- ۳- حاصل به دست آمده از مرحله قبل را در خارج قسمت می نویسیم و در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل ضرب را در زیر مقسوم می نویسیم.
- ۴- چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم، بنابراین علامت جمله های آن را قرینه می کنیم.
- ۵- اکنون چند جمله ای باقی مانده را نیز مانند مرحله قبل، بر مقسوم علیه تقسیم می کنیم.
- ۶- این تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که یا باقی مانده صفر شود و یا درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر باشد.

مثال: چند جمله ای $15 - 7x + 2x^2$ را بر $x - 5$ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی مانده تقسیم را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم علیه} \quad \text{مقسوم} \\
 \begin{array}{r}
 \textcircled{+2x^2} - 7x - 15 \quad | \quad \textcircled{x} - 5 \\
 \underline{-2x^2 + 10x} \\
 3x - 15 \\
 \underline{-3x + 15} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

باقی مانده

$$\begin{array}{l}
 \text{خارج قسمت} \\
 2x + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{2x^2}{x} = 2x \\
 \frac{3x}{x} = 3
 \end{array}$$

پاسخ:

❖ **نکته:** هر گاه در یک تقسیم، باقی مانده صفر شود می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

✍ **تمرین ۲۰:** تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{x^2} + 8x + 11 \quad | \quad \textcircled{x} + 2 \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 6x + 11 \\
 \underline{-6x + 12} \\
 -1
 \end{array}$$

باقی مانده

$$\begin{array}{l}
 \frac{x^2}{x} = x \\
 \frac{6x}{x} = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{2x^3} - 4x + 2 \quad | \quad \textcircled{x} - 1 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 2x^2 - 4x + 2 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{+2x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

باقی مانده

$$\begin{array}{l}
 \frac{2x^3}{x} = 2x^2 \\
 \frac{2x^2}{x} = 2x \\
 \frac{-2x}{x} = -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8x^3 - 125 \quad | \quad 5 - 2x \\
 \underline{-2x + 5} \\
 8x^3 - 125 \\
 \underline{8x^3 - 20x^2} \\
 +20x^2 - 125 \\
 \underline{20x^2 - 50x} \\
 50x - 125 \\
 \underline{50x - 125} \\
 0 \text{ باقی مانده}
 \end{array}$$

خارج قسمت

$$\begin{aligned}
 \frac{8x^3}{-2x} &= -4x^2 \\
 \frac{20x^2}{-2x} &= -10x \\
 \frac{50x}{-2x} &= -25
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 5x + 9x^3 - 4 \quad | \quad 3x + 2 \\
 \underline{3x^2 - 2x + 3} \\
 9x^3 + 5x - 4 \\
 \underline{9x^3 + 6x^2} \\
 -6x^2 + 5x - 4 \\
 \underline{-6x^2 - 4x} \\
 9x - 4 \\
 \underline{9x + 6} \\
 -10 \text{ باقی مانده}
 \end{array}$$

خارج قسمت

$$\begin{aligned}
 \frac{9x^3}{3x} &= 3x^2 \\
 \frac{-6x^2}{3x} &= -2x \\
 \frac{9x}{3x} &= 3
 \end{aligned}$$

❖ نکته: اگر تقسیمی درست انجام شده باشد رابطه های زیر برای آن تقسیم درست باشند:

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ درجه مقسوم علیه} < \text{درجه باقی مانده} \\ (2) \text{ مقسوم} = \text{باقی مانده} + \text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت} \end{array} \right.$$

تمرین ۲۱ ✍ تقسیم زیر را انجام دهید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط تقسیم نشان دهید.

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 7 \quad | \quad 2x + 3 \\
 \underline{4x^2 + 6x} \\
 -6x - 7 \\
 \underline{-6x - 9} \\
 2
 \end{array}$$

پاسخ:

حال باید رابطه های تقسیم را بنویسیم:

اولاً درجه باقی مانده صفر است که از درجه مقسوم علیه که یک می باشد کمتر است. دوماً

$$(2x - 3) \times (2x + 3) + 2 = 4x^2 + \cancel{6x} - \cancel{6x} - 9 + 2 = 4x^2 - 7$$

تمرین ۲۲ ✍ خارج قسمت تقسیمی $-3x + 2$ ، مقسوم علیه آن $x + 1$ و باقی مانده آن -5 شده است. مقسوم را به دست آورید.

مقسوم = باقی مانده + مقسوم علیه $\times$ خارج قسمت

پاسخ:

$$(-3x + 2) \times (x + 1) + (-5) = -3x^2 - 3x + 2x + 2 - 5 = -3x^2 - x - 3$$

تمرین ۲۳. الف* اگر چند جمله ای $a - x^2 - 2x^3$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است بنابراین باقی مانده صفر می شود.

پس کافی است تقسیم را انجام داده و باقی مانده آن را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^3} - x^2 - a \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \quad \quad 2x^2 + 3x + 6 \\
 - + 4x^2 \quad \quad \text{خارج قسمت} \\
 \hline
 3x^2 - a \\
 \underline{3x^2 - 6x} \\
 - + 6x - a \\
 \hline
 6x - a \\
 \underline{6x - 12} \\
 - + 12 - a \quad \text{باقی مانده}
 \end{array}$$

$$\text{باقی مانده} = 0 \Rightarrow 12 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

ب* مقدار m را طوری تعیین کنید که عبارت $m + 4 - 7x + x^2$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است بنابراین باقی مانده

صفر می شود. پس کافی است تقسیم را انجام داده و باقی مانده آن را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^2} - 7x + 4 + m \quad | \quad x - 3 \\
 \underline{x^2 - 3x} \\
 - + 4x + 4 + m \\
 \underline{-4x + 12} \\
 - + 16 + m \\
 \hline
 -8 + m \quad \text{باقی مانده}
 \end{array}$$

$$\text{باقی مانده} = 0 \Rightarrow -8 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = +8}$$

پ* مقدار a را طوری تعیین کنید که باقی مانده تقسیم $a - 6x + 3x^2$ بر $x + 5$ برابر ۳ باشد.

پاسخ: کافی است تقسیم را انجام داده و باقی مانده آن را

مساوی ۳ قرار دهیم.

$$\begin{array}{r}
 \cancel{3x^2} - 6x + a \quad | \quad x + 5 \\
 \underline{3x^2 + 15x} \\
 - - 21x + a \\
 \underline{-21x - 105} \\
 - + 105 + a \quad \text{باقی مانده}
 \end{array}$$

$$\text{باقی مانده} = 3 \Rightarrow +105 + a = 3 \Rightarrow a = +3 - 105 = -102 \Rightarrow \boxed{a = -102}$$

ردیف	آزمون فصل ۷	مدت آزمون: ۸۰ دقیقه	بارم
۱	جمله درست را با «☐» و جمله نادرست را با «☐» مشخص کنید. الف * عبارت $\frac{\sqrt{3}x+5}{-2x+1}$، گویا نیست. ☐ ب * عبارت $\frac{ay+y}{y}$ پس از ساده کردن، برابر $a+1$ است. ☐ پ * حاصل جمع $\frac{a}{t} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t}$ برابر $\frac{a+b+c}{3t}$ می باشد. ☐ ت * عبارت $\frac{-x-y}{x-3}$ با $\frac{x+y}{3-x}$ برابر است. ☐	۱	
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف * به کسری که صورت و مخرج آن باشد عبارت گویا می گویند. ب * ساده شده عبارت $\frac{6xy^2+8x^5y^3}{2xy}$ برابر است. پ * در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای، درجه باقی مانده از درجه کوچکتر است.	۰/۷۵	
۳	گزینه درست را مشخص کنید. الف * عبارت $\frac{a+3}{5-a}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟ (۱) $\frac{a-3}{5+a}$ ☐ (۲) $\frac{3-a}{5-a}$ ☐ (۳) $\frac{a-3}{a-5}$ ☐ (۴) $\frac{-a-3}{a-5}$ ☐ ب * کدام یک از عبارت های زیر، به ازای $x=3$ تعریف نشده است؟ (۱) $\frac{x^2-9}{x+3}$ ☐ (۲) $\frac{x^2+9}{3}$ ☐ (۳) $\frac{x-3}{3x}$ ☐ (۴) $\frac{4x-1}{x-3}$ ☐ پ * کدام یک از عبارت های زیر درست است؟ (۱) $\frac{1}{x+y} = \frac{-1}{x-y}$ ☐ (۲) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ ☐ (۳) $\frac{a}{b} \div \frac{b}{a} = 1$ ☐ (۴) $\frac{-2x-y}{y+2x} = 1$ ☐	۰/۷۵	
۴	هر یک از عبارت های زیر، به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟ الف * $\frac{4x-1}{x^2-81}$ ب * $\frac{xy+1}{x^2+5x}$	۲	
۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید تا تساوی برقرار باشد. $\frac{x}{x+1} = \frac{2x^2+5x}{\boxed{}}$	۱	

۶	الف* اگر مساحت مستطیلی $x^2 + 7x + 10$ و عرض آن $\frac{x^2-25}{x+2}$ باشد، طول مستطیل را بر حسب x به دست آورید. ب* حاصل عبارت زیر را به ساده ترین شکل بنویسید. $\frac{5n^2-5}{n-5} \div \frac{n^2+6n+5}{n^2-25} =$	۲
۷	حاصل عبارت های جبری زیر را به دست آورید. الف* $\frac{3y-1}{y^2-4} + \frac{5}{y+2} =$ ب* $\frac{3a-1}{2a-b} - \frac{4a-2}{b-2a} =$	۲ ۱
۸	عبارت مقابل را ساده کنید. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \div \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) =$	۲/۵
۹	تقسیم زیر را انجام دهید و خارج قسمت و باقی مانده را مشخص کنید. $\begin{array}{r} 2x-3 \\ -2x^2+4x^3-7 \end{array}$	۲
۱۰	الف* خارج قسمت تقسیمی $x-5$، مقسوم علیه آن x^2+1 و باقی مانده آن $6-$ شده است. مقسوم را به دست آورید.	۱
۱۱	ب* مقدار m را طوری تعیین کنید که باقی مانده تقسیم $m + x^2 - 8x - 9$ بر $x-4$ برابر ۷ باشد.	۲
		۲۰

بسمه تعالی

درس نامه و نکات کلیدی و حل تمرین های فصل هشتم پایه نهم

درس اول: حجم و مساحت کره

حجم های هندسی سه دسته هستند :

(۱) حجم های منشوری

(۲) حجم های کروی

(۳) حجم های هرمی

دایره: یک شکل هندسی مسطح است که چنین تعریف می شود:

مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی این نقاط از یک نقطه مشخص به نام مرکز به یک فاصله ثابت است که این فاصله ثابت همان شعاع دایره است .

کره: یک شکل هندسی فضایی است که چنین تعریف می شود:

به مجموعه نقاطی از فضا گفته می شود که فاصله ی همه آنها از نقطه ای ثابت به نام مرکز به یک فاصله است که این فاصله ثابت همان شعاع کره است .

نکته) هر گاه یک دایره یا نیم دایره را حول قطرش دوران دهیم کره بوجود می آید

نکته) از دوران ربع دایره حول شعاع اش یک نیم کره بوجود می آید .

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{حجم کره:}$$

مثال (حجم کره به شعاع ۳ را بیابید:) $V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{مساحت کره:}$$

مثال (مساحت نیم کره چوبی توپر به شعاع ۵ سانتی متر را بیابید :

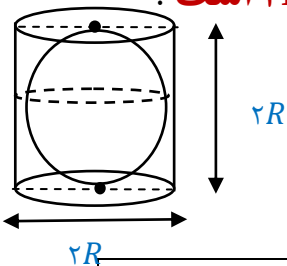
مساحت قاعده + مساحت رویه = مساحت نیم کره توپر

$$= \left(\frac{1}{2} \times 4\pi R^2 \right) + \pi R^2 = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 \Rightarrow 3\pi \times 5^2 = 75\pi$$

تذکره) اگر نیم کره تو خالی باشد مساحت قاعده را نباید جمع کنیم .

نکته (چنانچه کره ای به شعاع R در داخل استوانه ای محاط شود (استوانه بر کره

محیط شود) قطر قاعده ی استوانه ۲R است و نیز ارتفاع استوانه نیز ۲R است .



$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 h = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

* نکته: حجم فضای خالی بین کره و استوانه، $\frac{1}{3}$ حجم کره است .

* نکته: حجم استوانه $\frac{2}{3}$ حجم کره است و به عبارت دیگر حجم کره $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است و

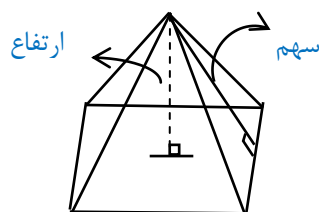
حجم فضای خالی $\frac{1}{3}$ حجم استوانه است.

برای یادگیری بهتر کار در کلاس و تمرین های درس سوم را حل کنید.

درس دوم: حجم هرم و مخروط

هرم: یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است . قاعده ی هرم چند ضلعی میتواند باشد. روی محیط این چند ضلعی سطح هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس یکدیگر را قطع می کنند . به این سطح ها وجه جانبی گویند .

ارتفاع هرم: فاصله رأس هرم تا قاعده هرم (طول خط عمودی که از رأس بر قاعده رسم می شود) را گویند .



سهم: ارتفاع وارد شده از رأس هرم به ضلع قاعده

نکته) اگر قاعده هرم یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه های جانبی آن هم نهشت باشند، هرم را منتظم گوییم.

چهار وجهی منتظم: هرم منتظم با قاعده مثلث متساوی الاضلاع را گویند که وجه های جانبی و قاعده با هم همنهشت باشند .

یال: محل تقاطع هر دو وجه جانبی را یال هرم می گویند .

نکته) اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم آنها با هم برابر است .

حجم هرم:

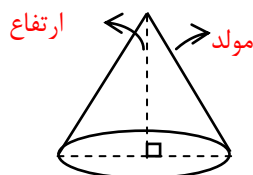
$$V = \frac{1}{3}sh \quad \left(\begin{array}{l} s = \text{مساحت قاعده} \\ h = \text{ارتفاع هرم} \end{array} \right)$$

مثال حجم هرم با قاعده مربع به ضلع ۶ سانی متر را بدست آورید؟ (ارتفاع هرم ۱۰ سانی متر است).

$$\text{سانی متر } 120 \text{ مکعب} = 10 \times (6 \times 6) \times \frac{1}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}sh : \text{حجم هرم}$$

مخروط: شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط

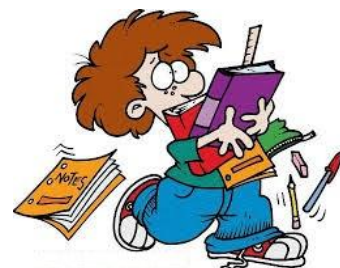
مرکز این دایره است.



نکته: مخروط یال ندارد.

$$V = \frac{1}{3}sh \Rightarrow \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad \text{حجم مخروط}$$

نکته از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه، مخروط بدست می آید. ضلعی که مثلث را حوال آن دوران دادیم ارتفاع و ضلع دیگر زاویه قائمه مثلث، شعاع مخروط است.



مثال) حجم مخروط حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۶ و ۴ سانتی متر حول ضلع ۶ سانتی متر را بدست آورید .

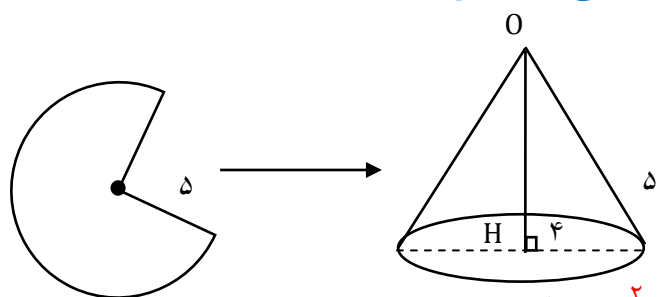
$$V = \frac{1}{3}sh \Rightarrow \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi \text{ متر شاع قاعده: ۴ سانتی متر}$$

نکته) می توان با قسمتی از دایره مخروط ساخت که در این صورت شاع این دایره،

مولد مخروط خواهد بود

مثال) با قسمتی از دایره به شاع ۵ سانتی متر، مخروطی به شاع قاعده ی ۴ ساخته ایم حجم

مخروط را بیابید.



$$OH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$OH = \sqrt{9} = 3$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi$$

درس سوم: سطح و حجم

$S =$ مساحت قاعده

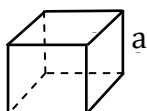
$$V = sh$$

حجم منشور

$h =$ ارتفاع منشور

مساحت جانبی منشور: محیط قاعده $\times$ ارتفاع

مساحت کل منشور: مساحت جانبی $+ 2$ برابر مساحت قاعده



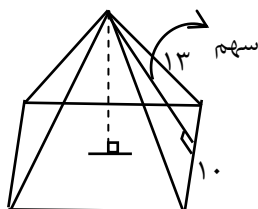
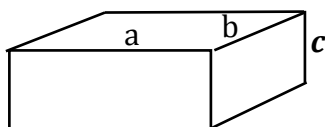
حجم مکعب به ضلع $V = a^3$

مساحت کل مکعب به ضلع $S = 6a^2$

مساحت جانبی مکعب به ضلع $S = 4a^2$

حجم مکعب مستطیل به اضلاع a و b و c : $V = a \times b \times c$

مساحت کل مکعب مستطیل به اضلاع a و b و c : $S = 2ab + 2ac + 2bc$



مساحت جانبی هرم: $\frac{1}{3} \times$ محیط قاعده $\times$ سهم

مثال) مساحت جانبی هرم با قاعده مربع زیر را محاسبه کنید.

$$12 = \text{سهم} \Rightarrow 144 = \text{سهم}^2 \Rightarrow 13^2 - 5^2 = \text{سهم}^2$$

$$\text{محیط قاعده} = 4 \times 10 = 40$$

$$\text{مساحت جانبی هرم} = \frac{1}{3} \times 40 \times 12 = 240$$

نمونه سوالات امتحانی فصل هشتم

۱- حجم کره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر را بیابید.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4000}{3}\pi$$

۲- مساحت نیم کره چوبی توپر به شعاع ۲۰ سانتی متر را بیابید.

$$S = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 20^2 = 1200\pi$$

۳- مساحت نیم کره تو خالی به شعاع ۲۰ سانتی متر را بیابید.

$$S = 2\pi R^2 = 2 \times \pi \times 20^2 = 800\pi$$

۴- یک کاسه به شکل نیم کره و به قطر ۲۰ cm را پر از آب کرده و آب آن را در ظرف استوانه

ای شکل به قطر ۲۰ cm می ریزیم. ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟

$$\text{شعاع کاسه} = 20 \div 2 = 10 \text{ cm}$$

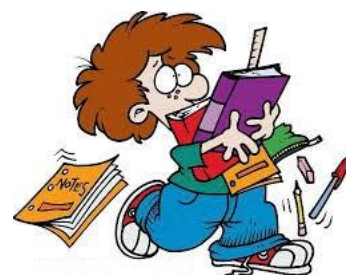
$$\text{شعاع استوانه} = 20 \div 2 = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R h^2 \Rightarrow \frac{2}{3}R = h \Rightarrow h = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3}$$

۵- مساحت کل نیم کره چوبی توپری برابر با 300π است شعاع نیمکره و حجم آن را بدست آورید.

$$3\pi R^2 = 300\pi \Rightarrow R^2 = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow R = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4000}{3}\pi$$



۶- کره ایی به شعاع 4 cm را درون کرده ای به شعاع 8 cm قرار می دهیم . حجم فضای خالی را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$$

کره کوچک

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = \frac{2048}{3}\pi$$

کره بزرگ

$$\text{فضای خالی} = \frac{2048}{3}\pi - \frac{256}{3}\pi = \frac{1792}{3}\pi$$

۷- مساحت رویه یک کره برابر با 144π است شعاع و حجم کره را بدست آورید.

$$4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R^2 = \frac{144}{4} = 36 \quad R = \sqrt{36} = 6$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi$$

حجم

۸- اگر شعاع کره ایی را ۳ برابر کنیم، حجم و مساحت رویه آن چه تغییری می کند .

چون در مساحت شعاع به توان ۲ می رسد بنابراین مساحت ۹ برابر (3^2) می شود

ولی چون در حجم شعاع به توان ۳ می رسد بنابراین حجم ۲۷ برابر (3^3) می شود.

۹- با قسمتی از دایره به شعاع 10 cm ، مخروطی به شعاع 6 cm ساخته ایم حجم مخروط را بیابید .

$$h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$$

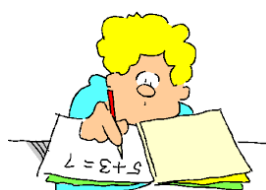
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$$

مخروط

۱۰- کره ای به شعاع ۳ درون استوانه ای محاط شده است . حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر

است؟ $h = 3 \times 2 = 6$ استوانه

$$V = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi \quad \text{فضای خالی} = \frac{1}{3} \times 54\pi = 18\pi$$



۱۱- حجم هرمی را حساب کنید که قاعده ی آن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 8 cm می باشد و ارتفاع هرم 12 cm می باشد.

نکته: مساحت متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ بدست می آید.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3} \text{ مثلث}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 16\sqrt{3} \times 12 = 64\sqrt{3} \text{ هرم}$$

۱۲- قطر قاعده هرم 10 cm است قاعده هرم مستطیل شکل است و طول قاعده آن 8 cm و ارتفاع هرم برابر با 15 cm است. حجم هرم را بدست آورید.

$$x^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ عرض مستطیل}$$

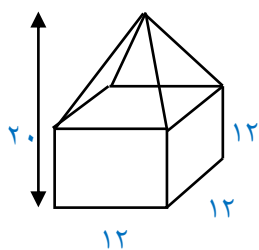
$$S = 8 \times 6 = 48 \text{ مساحت مستطیل} \quad V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 48 \times 15 = 240$$

۱۳- حجم هرمی را حساب کنید که قاعده آن لوزی به قطرهای 10 و 8 سانتی متر و ارتفاع هرم 18 سانتی متر باشد.

$$S = \frac{8 \times 10}{2} = 40 \text{ لوزی}$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 40 \times 18 = 240 \text{ هرم}$$

۱۴- حجم شکل مقابل را بدست آورید.



$$V = 12 \times 12 \times 12 = 1728 \text{ مکعب} \quad h = 20 - 12 = 8 \text{ هرم}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 8 = 384 \text{ هرم} \quad V_{\text{کل}} = 1728 + 384 = 2112$$

۱۵- حجم و مساحت کل مکعب به ضلع 5 cm را بدست آورید .

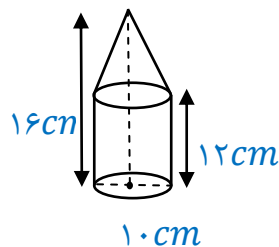
$$V = 5 \times 5 \times 8 = 125 \text{ مکعب}$$

$$S = 6 \times 5 \times 5 = 150 \text{ مکعب}$$

۱۶- حجم و مساحت کل مکعب مستطیلی که طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب 4 cm و 8 cm و 6 cm می باشد را بدست آورید.

$$V = 4 \times 6 \times 8 = 192 \text{ مکعب}$$

$$S = 2(6 \times 4) + 2(4 \times 8) + 2(6 \times 8) = 48 + 64 + 96 = 208 \text{ مکعب}$$



۱۷- حجم شکل مقابل را بدست آورید. (قطر استوانه 10 سانتی متر است)

$$V = \pi R^2 h = \pi \times 5^2 \times 12 = 300\pi \text{ استوانه}$$

$$h = 16 - 12 = 4 \text{ مخروط}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 4 = \frac{100}{3} \pi \text{ مخروط}$$

$$V = 300\pi + \frac{100}{3} \pi = \frac{1000}{3} \pi \text{ کل}$$

۱۸- از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم 6 cm و 8 cm سانتی متر حول ضلع قائم 8 سانتی متر آن چه شکلی بوجود می آید؟ حجم حاصل را بدست آورید. مخروط

$$h = 8 \quad R = 6$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ مخروط}$$

